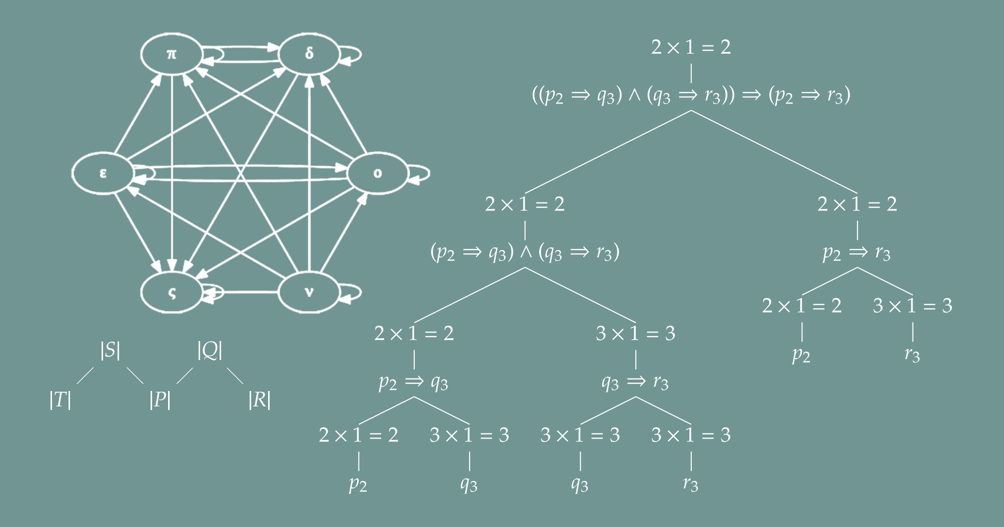
J.-Martín Castro-Manzano



LÓGICA, ARGUMENTACIÓN Y PLANOS CATEGORIALES





LÓGICA, ARGUMENTACIÓN Y PLANOS CATEGORIALES

Procedimiento de selección de originales, ver página web:
www.tirant.net/index.php/editorial/procedimiento-de-seleccion-de-originales

LÓGICA, ARGUMENTACIÓN Y PLANOS CATEGORIALES

J. MARTÍN CASTRO-MANZANO



tirant humanidades
Valencia, 2022

En caso de erratas y actualizaciones, la Editorial Tirant Humanidades publicará la pertinente corrección en la página web www.tirant.com.

Este libro será publicado y distribuido internacionalmente en todos los países donde la Editorial Tirant lo Blanch esté presente.

EDITA: TIRANT HUMANIDADES MÉXICO
Av. Tamaulipas 150, Oficina 502
Hipódromo, Cuauhtémoc
06100 Ciudad de México
Telf.: +52 1 55 65502317
infomex@tirant.com
www.tirant.com/mex/
www.tirant.es
ISBN: 978-84-19286-34-5
MAQUETA: Innovatext

Esto no es un enunciado.
Es tinta.

Der Zweck der Philosophie ist die logische Klärung der Gedanken. Die Philosophie ist keine Lehre, sondern eine Tätigkeit. Ein philosophisches Werk besteht wesentlich aus Erläuterungen. Das Resultat der Philosophie sind nicht "philosophische Sätze", sondern das Klarwerden von Sätzen. Die Philosophie soll die Gedanken, die sonst, gleichsam, trübe und verschwommen sind, klar machen und scharf abgrenzen.

— Ludwig Wittgenstein
Tractatus Logico-Philosophicus, 4.112

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Índice de diagramas

Prefacio

Celebro la publicación de este libro y agradezco la oportunidad que su autor me concede para expresar las siguientes líneas. Se trata de la primera obra en español sobre el tema de los planos categoriales y un sistema lógico que los regule, sintáctica y semánticamente.

1. Este libro lo consideré necesario por años, me hubiera gustado escribirlo. Por supuesto, su autor revela que conoce más de lo que yo podría expresar y plantear. La idea simple de contar con una herramienta lógica (capítulos 2 al 4) que refleje una regulación del estatus de los *planos categoriales* con el fin de mostrar y prever los llamados *errores categoriales* es sumamente atractiva. Algunos de estos *errores* son meros descuidos basados en la ignorancia y uso del lenguaje (por ejemplo: confundir *uso* y *mención*), pero otros son sutiles y no identificarlos a tiempo puede ocasionar desvíos conceptuales, pseudo-razonamientos e incluso afirmaciones que no pueden justificarse adecuadamente; *véase* la famosa *falacia de reificación* o aquella falacia (*salto categorial*) que algunos seguidores de Descartes hacen cuando desean justificar el paso lógico-conceptual (inferencia válida y sólida) para afirmar la existencia del ego (plano ontológico), con base en "el pensamiento de éste" (plano epistémico-mental). Por ello debemos celebrar contar con este libro.

2. El capítulo 5 permite aprender la función ontológica, pero sobre todo la pertinencia lógica, de la *teoría de categorías* y comprender mejor la importancia de una *lógica de los planos categoriales* (L_C). Con mucho cuidado el autor del texto nos guía históricamente y muestra la evolución conceptual de la palabra "categoría" (κατεγορία). Nos dice que al principio tuvo usos (sentidos) en Grecia alejados del significado que Aristóteles le dio, quien destaca una función crucial del término para determinar lo real. El recorrido llega a nuestros días, no sin antes mencionar autores y exponer con claridad y precisión

las propuestas teóricas que en su momento hicieron. [En la sección 7 de este Prefacio, diré algo más sobre este capítulo.]

3. Ryle y Sommers resultan significativos en la historia de los conceptos clave del libro: *plano*, *error* y *salto categorial*. Esta terminología ha sido usada por muchos de nosotros al enseñar al estudiante universitario, sobre todo al estudiante de filosofía. Hemos visto que beneficia al estudioso de las lógicas, las ontologías, las epistemologías y a todo aquel que emplea el lenguaje de manera rigurosa. También al *razonador/pensador crítico* (sea del área de la filosofía, de la ciencia, de las humanidades, o de disciplinas técnicas e informáticas, por ejemplo), pues difícilmente se puede admitir un *pensamiento crítico* que no incluya el uso adecuado de los planos categoriales. Como afirma J.-Martín Castro-Manzano: "En la analítica filosófica, como en la argumentación, no basta con considerar a la verdad, la validez, la solidez o la relevancia: la aproximación categorial también es fundamental." (p.93)

4. Al enseñar filosofía (ontología, epistemología, ética, etc.) y algunas asignaturas (filosofía del lenguaje, de la mente, de la educación, discusión filosófica, análisis filosófico, etc.), promuevo el *pensamiento crítico* como un pensamiento cuidadoso y fino donde el filosofar riguroso es clave. Cuidar el *flujo* de las *ideas* y *razonamientos* es una responsabilidad compartida en la docencia, en la investigación y difusión del pensamiento claro, ordenado y riguroso. El orden en la comunicación conlleva la revisión para identificar y evitar errores. Contar con una herramienta que nos apoye a evitar, o en su defecto a identificar y corregir ciertos errores, sin duda es motivo de agradecimiento al autor de este libro, ya que los *errores categoriales* son un tema central del libro. Evitarlos es el objetivo de contar con una L_C (*lógica de los planos categoriales*): un sistema lógico que apoye nuestra lógica clásica (L_0) y nuestros sistemas no-clásicos contemporáneos.

5. Para este libro los lectores pueden optar por la lectura lineal (seguir el orden de los capítulos), o atender a mi sugerencia: comenzar con el capítulo 1, luego ir al 5, y posteriormente regresar al 2, 3

y 4. Al final, el capítulo 6 o de las conclusiones se comprenderá muy bien.

6. El capítulo 1 es una muy buena introducción a las intuiciones y problemas a resolver, mediante ejemplos J.-Martín trae al análisis el tema de una lógica categorial. El capítulo 5 ubica el origen de una *familia de expresiones* que usa en el libro, a saber: *plano/error/salto categorial*, mismos que conforman la base conceptual para su propuesta de una lógica categorial, o dicho técnicamente, un sistema lógico no-clásico que permita atender tales *expresiones* (capítulos 2 al 4).

7. El capítulo 5 es histórico, como dijimos antes, pero también explicativo. Primero ofrece una descripción de algunos sentidos de “categoría” hasta llegar al concepto de categoría con las connotaciones filosóficas relevantes para la ontología y la lógica. En particular el uso denotativo/referencial relacionado a la predicación. Y después el autor explica con mucho cuidado y de manera técnica algunas propiedades lógicas de su propuesta L_C.

Se mencionan:

a) La importancia del papel de las categorías en Aristóteles, de hecho puede decirse con el autor que se trata de una *teoría de categorías*, donde los planos lingüístico y ontológico tienen un rol importante (el “decirse de” y el “estar en” un sujeto, respectivamente).

b) La teoría categorial medieval expresada en las *teorías de la suposición* (de Pedro Hispano, Guillermo de Sherwood y Alberto de Sajonia, por ejemplo) con compromisos ontológicos realistas e incluso la posición nominalista de Occam. Se comparan las *teorías de la suposición* y para J.-Martín Castro-Manzano dicha *teoría de la suposición*: “ofrece un conjunto de modelos sobre la referencia de los términos con base en la estructura de la predicación y que, en general, mientras los autores del siglo XIII ofrecieron modelos realistas, los del siglo XIV propusieron modelos más bien nominalistas.” (p. 86)

c) Las diferencias de la teoría categorial aristotélica con la taxonomía kantiana, donde el autor precisa que Kant formuló su teoría "con base en la estructura y tipos de enunciados." (v. p. 87)

d) La propuesta de Hartmann, la teoría de tipos de Russell y los trabajos de Ryle y Sommers. Estos últimos autores, se afirma, emplearon la expresión "error categorial" en su visión de las categorías. El autor dedica las páginas 90-93 a la propuesta de Sommers, señalando aspectos teóricos relevantes que el lector debe añadir a la propuesta del autor sobre un *sistema lógico de categorías*.

Para esta parte del capítulo 5 el lector puede apoyarse con la lectura de los capítulos 2 al 4, pues el autor del libro precisa rasgos de su L_C los cuales suponen la notación y una comprensión de ella.

8. El concepto de "plano categorial" podría resultar de difícil ubicación. No se trata de un concepto propiamente formal, de la *lógica* por ejemplo, o de la *epistemología*, o de la *ontología*, pero sirve a todas estas áreas de la filosofía y a muchas áreas del conocimiento. Quizás dentro de la *teoría de la argumentación* podría tener un lugar como un concepto que previene de posibles *errores* comparados a las falacias informales, pero no es el caso, pues en otras áreas de la filosofía, de la ciencia, y del procesamiento de la información en general, los planos categoriales tienen presencia y utilidad. Por ello, en este obra (capítulos 1 al 4), su autor rescata el valor de los *planos* y sus interrelaciones mediante lo que denomina una *lógica escalar* de tales *planos*. Se trata de: "bosquejar un sistema lógico escalar para lidiar con planos categoriales" (p. 47), al menos seis; así, dicha lógica escalar "modela relaciones lógicas entre planos categoriales." (p. 53). Su autor denomina a este sistema *lógica de planos categoriales*, o llanamente lógica categorial. Explica que L_C no define un álgebra booleana, por ende no es un sistema lógico clásico, no tiene una interpretación asertórica, ni preserva monotonía. Además, L_C se complementa con la "denegación": una *denegación* "es una negación de orden superior que pretende capturar una diferencia entre la nega-

ción de un error categorial (que, como decíamos arriba, sigue siendo un error categorial) y el rechazo de que un enunciado se encuentre en cierto plano categorial." (p. 53)

9. La expresión "plano categorial" es, desde nuestra perspectiva, un concepto metafilosófico. Dentro de las distintas conceptualizaciones filosóficas, pero no solo, resulta de gran utilidad prestar atención a *qué* son los planos categoriales y *cómo* nos previenen de caer en algunos errores denominados "categoriales"; en específico, pasar advertida o inadvertidamente entre los planos con riesgo a consecuencias perfectamente evitables. El autor lo define así, cito (p. 43): "Un error categorial ocurre cuando a un ítem que pertenece a una determinada categoría se le asigna, de manera inapropiada, un atributo que pertenece a otra categoría." Ejemplos de estos planos, reconocidos históricamente, son: el plano epistemológico, el plano ontológico, el plano lingüístico, el plano lógico, el deóntico, etc.

10. El autor en el capítulo 3 (p. 43) explica el estatus de una *categoría*: "es una herramienta ontológica ubicua que nos ayuda a clasificar ítems, ordenar el mundo y construir taxonomías, y al hacerlo, nos previene de cometer errores categoriales." Podríamos decir, desde una perspectiva analítica del texto que el autor ve a una *categoría* como un constructo instrumental cuya utilidad es prevenirnos de *errores* pero también especificar un "orden ontológico".

11. En el capítulo 4 el autor bosqueja una *lógica producto* entre la lógica escalar L_{C} y la lógica escalar clásica L_0 (lógica proposicional clásica) para modelar "relaciones lógicas entre valores de verdad y planos categoriales." (p. 73) Con esta *lógica producto* el autor elucida cómo algunos razonamientos pueden tener *validez categorial* (definida al interior de L_{C}) pero ser inválidos clásicamente (como se entiende en la lógica clásica L_0), o ser válidos clásicamente pero cometer un error categorial.

12. El uso de muchos ejemplos es gratificante en el libro, ya que permiten comprender la teoría y la importancia del tema.

Quiero terminar este Prefacio agradeciendo a su autor el recordar por escrito en sus Conclusiones (capítulo 6) el haber incursionado en

estos temas en virtud de uno de mis cursos. Nada más satisfactorio para un docente que una lección dé como fruto la motivación para ocuparse en el tema por muchos años, como lo ha hecho el autor, y escribir un libro, que repito, seguramente es un valioso apoyo para docentes y estudiantes. Los investigadores del tema identificarán la erudición de algunas ideas vertidas en el libro. El público en general, amante del rigor lógico y las precisiones que nos permite el lenguaje, presumo incursionará de la mano de esta herramienta. Bienvenida la L_C.

Ariel Félix
Campirán Salazar
Xalapa, Veracruz

Filosofía exacta. La filosofía construida con la ayuda de herramientas lógicas y matemáticas.

— Mario Bunge
Diccionario de Filosofía

1. Introducción

Podemos decir, en cierto sentido, que la lógica es una disciplina filosófica que estudia el razonamiento. Y en ese mismo sentido también podemos añadir que un razonamiento es una relación que nos permite obtener una conclusión a partir de un conjunto premisas. Pero claro, no todo razonamiento es correcto: después de todo, solemos decir que mientras algunos razonamientos son "lógicos", otros no lo son. A modo de ejemplo, consideremos los siguientes:

1. Si Juan es persona, tiene derechos.	1. Si el "sol" es monosilábico, el Sol existe.
2. De hecho, Juan es persona.	2. De hecho, el "sol" es monosilábico.
C. Por tanto, Juan tiene derechos.	C. Por tanto, el Sol existe.

¿Son igualmente "lógicos"? Uno podría pensar que mientras el razonamiento de la izquierda es lógico, el de la derecha no lo es. Y uno podría tener razón; sin embargo, por raro que parezca y según lo que se suele enseñar en los cursos típicos de lógica en preparatoria y universidad, ambos son igualmente correctos. ¿Cómo es esto posible?

Pues bien, la estructura de ambos razonamientos es la misma y es correcta—en los cursos típicos de lógica clásica se conoce como *Modus Ponens*—y todos sus enunciados son verdaderos— en particular, los del razonamiento de la derecha son verdaderos porque el término "sol" sí es monosilábico y el Sol, el astro, sí existe—; no obstante, está claro que un razonamiento como el de la derecha no es ni debería ser aceptable. ¿Qué podemos hacer al respecto?

Por sentido común podríamos afirmar que el hecho de que la palabra "sol" sea monosilábica no tiene nada que ver con la existencia del Sol. Esto es cierto, pero soluciones de esta naturaleza, aunque son útiles en la práctica, no nos satisfacen porque no son sistemáticas ni están bien definidas.

Desde un punto de vista más sistemático podríamos aprovechar una solución relevante o relevantoide; no obstante, una solución de este tipo, aunque es útil en teoría, no está relacionada con el tipo de análisis que necesita nuestro problema: el problema del argumento de la derecha no es la relevancia sino, como veremos, el error categorial. Pero como no tenemos una lógica explícitamente diseñada para modelar el error categorial, en este trabajo proponemos una. ¿Cómo lo hacemos?

Pensando en el concepto filosófico de error categorial creamos una lógica de planos categoriales (L_C) y la multiplicamos (sí, literalmente) por la lógica clásica de la preparatoria y la universidad (L_0) para generar una lógica producto ($L_{C\times 0}$) que nos permite aceptar que la estructura de ambos razonamientos es la misma, que ambos tienen enunciados verdaderos pero que, al mismo tiempo, nos permite reiterar que el de la izquierda es lógico pero el de la derecha no lo es. ¿Y para qué queremos esto?

Quizá los ejemplos anteriores no sean fascinantes, pero todo gana interés cuando analizamos razonamientos más complejos o cuando nos preguntamos: ¿por qué seguimos enseñando lógica clásica como si fuera *la* lógica? Por supuesto, no estamos insinuando que la lógica clásica no se debe enseñar, más bien sugerimos que, en el contexto de la argumentación—la filosófica, en particular—, deberíamos enseñar *algo más* que lógica clásica. ¿Y cómo podemos explorar esta propuesta?

Tratando de cubrir un poco de teoría e historia, en los Capítulos 2, 3 y 4 intentamos ofrecer la motivación, la sintaxis y la semántica de las lógicas previamente mencionadas; y en el Capítulo 5 exponemos un breve recuento histórico de los conceptos *categoría* y *error categorial*.

Πρῶτον εἰπεῖν περὶ τί καὶ τίνος ἐστὶν ἡ σκέψις, ʾότι περὶ ἀπόδειξειν καὶ ἐπιστήμης ἀποδεικτικῆς.

— Aristóteles
῾Αναλυτικὰ πρότερὰ, *A1 24a10*

2. La lógica escalar L_0

En general, decimos que un razonamiento es una relación entre un conjunto de premisas y una conclusión, que depende del seguimiento de ciertas normas. Así, un razonamiento puede ser (in)correcto dependiendo del (in)cumplimiento de tales normas.

Los sistemas lógicos, a su vez, son herramientas formales diseñadas y usadas para modelar y entender razonamientos. Usualmente se definen por pares de la forma $\langle L, B \rangle$ donde L es un lenguaje y B es una base semántica (a menudo equivalente a un cálculo, como veremos más adelante).

Típicamente, el lenguaje de un sistema lógico se define mediante un vocabulario y una sintaxis para determinar las expresiones legítimas de dicho lenguaje, mientras que la base semántica nos permite asignar significado a tales expresiones. Para ilustrar todo esto consideremos a la lógica proposicional clásica (en adelante, L_0).

La lógica proposicional clásica, también conocida como cálculo proposicional o cálculo de enunciados, es un sistema lógico escalar que resulta útil para representar cierta información sobre razonamientos que hacen uso de enunciados declarativos. En consecuencia, el vocabulario de L_0 está compuesto por dos conjuntos de signos: $VAR_{\mathsf{L}0}$, un conjunto (infinito numerable) de variables que representan enunciados en algún lenguaje natural; y $CONS_{\mathsf{L}0}$, un conjunto finito de constantes que representan modificaciones o relaciones entre tales variables:

- $VAR_{\mathsf{L}0} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$
- $CONS_{\mathsf{L}0} = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Utilizando este vocabulario, la sintaxis de L_0 se rige por dos reglas de formación expresadas de forma recursiva:

- *Caso base.* Si $\varphi \in VAR_{\mathsf{L}0}$, entonces φ es una fórmula bien formada (en adelante, fbf) de L_0.
- *Caso inductivo.* Si φ y ψ son fbfs de L_0, entonces $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ y $\varphi \Leftrightarrow \psi$ son fbfs de L_0.

La semántica de L_0 está definida por dos componentes: un dominio y una función de interpretación. El dominio de L_0 es el conjunto de valores de verdad $D = \{1, 0\}$ donde 1 representa el valor designado (interpretado como "verdadero") y 0 el valor antidesignado (interpretado como "falso"); y la función de interpretación f asigna elementos del conjunto de variables al dominio:

$$f: VAR_{\mathsf{L}_0} \longmapsto D$$

Con estos elementos, no solo podemos representar de manera explícita algunos principios de la lógica clásica (como el principio de tercio excluso (para toda fbf $\varphi \in \mathsf{L}_0, f(\varphi) = 1$ o $f(\varphi) = 0$) y el principio de no-contradicción (no existe fbf $\varphi \in \mathsf{L}_0$ tal que $f(\varphi) = 1$ y $f(\varphi) = 0$)), sino que podemos establecer una función de valuación $v_{\mathsf{L}0}$ para definir las constantes del sistema:

i) $v_{\mathsf{L}0}(\varphi) = f(\varphi)$
ii) $v_{\mathsf{L}0}(\neg\varphi) = 1 - v_{\mathsf{L}0}(\varphi)$
iii) $v_{\mathsf{L}0}(\varphi \wedge \psi) = min(v_{\mathsf{L}0}(\varphi), v_{\mathsf{L}0}(\psi))$
iv) $v_{\mathsf{L}0}(\varphi \vee \psi) = max(v_{\mathsf{L}0}(\varphi), v_{\mathsf{L}0}(\psi))$
v) $v_{\mathsf{L}0}(\varphi \Rightarrow \psi) = v_{\mathsf{L}0}(\neg\varphi \vee \psi)$
vi) $v_{\mathsf{L}0}(\varphi \Leftrightarrow \psi) = v_{\mathsf{L}0}((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi))$

La primera valuación nos dice que el valor de verdad de un enunciado es el que la función de interpretación le asigne. La segunda nos dice que el valor de verdad de la *negación* ($\neg$) de un enunciado es el valor opuesto a su valor original. La tercera nos dice que el valor de verdad de una *conjunción* ($\wedge$) de dos enunciados es el mínimo de los valores de cada enunciado. La cuarta función de valuación establece que el valor de verdad de la *disyunción* ($\vee$) de dos enunciados es el máximo de los valores de cada enunciado. La quinta función de valuación define el valor de verdad de una *implicación* ($\Rightarrow$) de dos enunciados como el máximo valor de la negación del antecedente φ y el consecuente ψ. Finalmente, la última función define la *equivalencia* o *coimplicación* ($\Leftrightarrow$) de dos enunciados como el mínimo valor de dos implicaciones.

Como se puede apreciar, estas valuaciones definen las reglas de correspondencia que nos permiten construir las tablas de verdad típicas de L_0:

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
		0	1	1	0
		0	0	1	1

Cuadro 2.1: Tablas de verdad

Usando esta base semántica se puede definir la noción de (in)corrección o (in)validez con más precisión: una inferencia es válida si y solo si no existe una valuación que haga verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión. Dada esta caracterización, por ejemplo, la inferencia del Cuadro 2.2 sería correcta porque no existe valuación alguna que haga verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión (lo cual se indica con cursivas); pero la inferencia del Cuadro 2.3 sería incorrecta porque existe una valuación (la del tercer renglón) que hace verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión. En efecto, mientras que la inferencia del Cuadro 2.2 se conoce como una regla de inferencia válida (el famoso *Modus Ponens*), la del Cuadro 2.3 se conoce como una falacia formal (la infame Falacia de Afirmación del Consecuente).

$\varphi \Rightarrow \psi$	$\wedge$	φ	$\Rightarrow$	ψ
1	1	1	*1*	1
0	0	1	*1*	0
1	0	0	*1*	1
1	0	0	*1*	0

Cuadro 2.2: *Modus Ponens*

$\varphi \Rightarrow \psi$	$\wedge$	ψ	$\Rightarrow$	φ
1	1	1	*1*	1
0	0	0	*1*	1
1	1	1	*0*	0
1	0	0	*1*	0

Cuadro 2.3: Falacia de Afirmación del Consecuente

Así pues, solemos distinguir entre una tautología (una expresión que siempre es verdadera, como en el caso del *Modus Ponens*), una contradicción (una expresión que siempre es falsa, como en el caso de $\varphi \wedge \neg \varphi$) y una contingencia (una expresión que no es una tautología ni una contradicción, como en el caso de la Falacia de Afirmación del Consecuente), como sigue:

Definición 1 (Tautología$_{L0}$)**.** *Una tautología*$_{L0}$ *es una fbf* φ *de* L_0 *t.q. para toda valuación* v_{L0} , $v_{L0}(\varphi) = 1$.

Definición 2 (Contradicción$_{L0}$)**.** *Una contradicción*$_{L0}$ *es una fbf* φ *de* L_0 *t.q. para toda valuación* v_{L0} , $v_{L0}(\varphi) = 0$.

Definición 3 (Contingencia$_{L0}$)**.** *Una contingencia*$_{L0}$ *es una fbf* φ *de* L_0 *que no es tautología*$_{L0}$ *ni contradicción*$_{L0}$.

Pero además, como decíamos renglones arriba, esta base semántica es equivalente a un cálculo que puede definirse de varias maneras: axiomáticamente (*à la* Hilbert), usando reglas de deducción natural y secuentes (*à la* Gentzen), o usando grafos arborescentes (*à la* Smullyan). Por mor de autocontención mencionaremos algunos detalles de estas tres presentaciones.

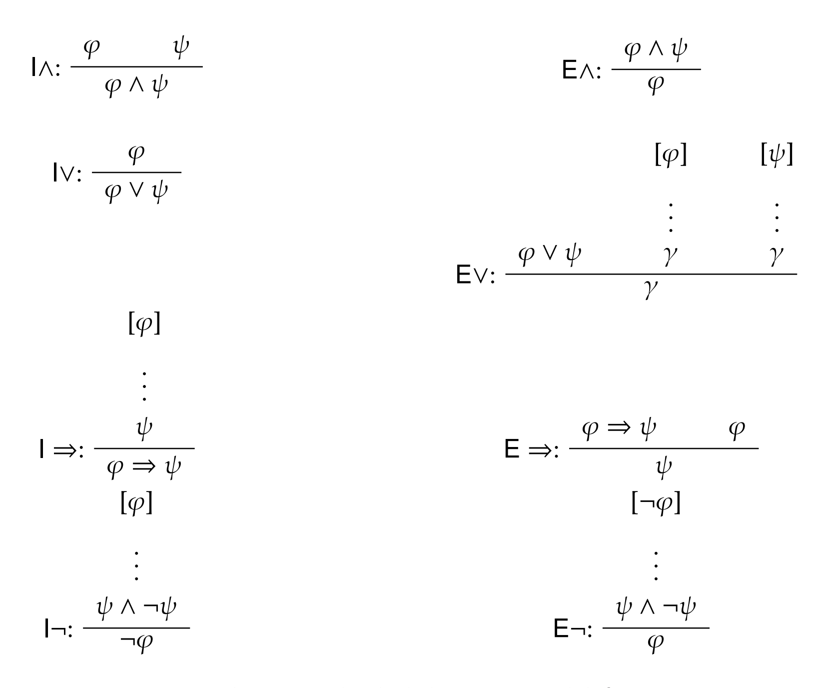
Axiomáticamente, L_0 puede definirse por medio de un conjunto de axiomas y algunas reglas de transformación. Una versión típica de esta presentación incluye, como axiomas, tres esquemas implicativos (donde φ, ψ y γ son metavariables que pueden representar cualquier fbf de L_0); y como regla de transformación, la Eliminación de la Implicación (E$\Rightarrow$) o *Modus Ponens* que indica que en la presencia de dos fbfs de la forma $\varphi \Rightarrow \psi$ y φ es permisible obtener ψ (pues, en efecto, como se mostró en el Cuadro 2.2, tal inferencia es válida):

- *Axioma 1.* $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$
- *Axioma 2.* $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \gamma))$
- *Axioma 3.* $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

$$\mathrm{E} \Rightarrow: \frac{\varphi \Rightarrow \psi \qquad \varphi}{\psi}$$

Cuadro 2.4: Axiomas y reglas de L_0

Alternativamente, L_0 puede definirse como un conjunto de reglas de inferencia (de introducción (I) y de eliminación (E)) de deducción natural (donde la expresión [φ] indica que φ es una suposición o una hipótesis) (Cuadro 2.5). Con secuentes, L_0 puede definirse por medio de ciertas reglas estructurales (Cuadro 2.6). Y por último, usando árboles, L_0 puede definirse mediante reglas arborescentes (Cuadro 2.7).



Cuadro 2.5: Reglas de deducción natural de L_0

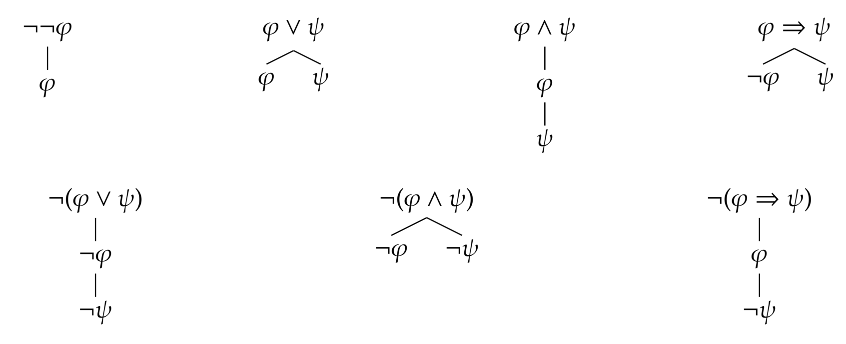
$$\neg\dashv:\ \frac{\Gamma \dashv \Omega, \Phi}{\neg\Phi \dashv \Omega} \qquad \dashv\neg:\ \frac{\Phi, \Gamma \dashv \Omega}{\Gamma \dashv \Omega, \neg\Phi}$$

$$\wedge\dashv:\ \frac{\Phi, \Gamma \dashv \Omega}{\Phi \wedge \Theta, \Gamma \dashv \Omega} \qquad \dashv\wedge:\ \frac{\Gamma \dashv \Omega, \Phi \quad \Gamma \dashv \Omega, \Theta}{\Gamma \dashv \Omega, \Phi \wedge \Theta}$$

$$\vee\dashv:\ \frac{\Phi, \Gamma \dashv \Omega \quad \Theta, \Gamma \dashv \Omega}{\Phi \vee \Theta, \Gamma \dashv \Omega} \qquad \dashv\vee:\ \frac{\Gamma \dashv \Omega, \Phi}{\Gamma \dashv \Omega, \Phi \vee \Theta}$$

$$\Rightarrow\dashv:\ \frac{\Gamma \dashv \Omega, \Phi \quad \Theta, \Gamma \dashv \Psi}{\Phi \Rightarrow \Theta, \Gamma, \Psi \dashv \Omega, \Psi} \qquad \dashv\Rightarrow:\ \frac{\Phi, \Gamma \dashv \Omega, \Phi}{\Gamma \dashv \Omega, \Phi \Rightarrow \Theta}$$

Cuadro 2.6: Reglas estructurales de L_0



Cuadro 2.7: Reglas arborescentes de L_0

Finalmente, y como decíamos al principio de este capítulo, este sistema cuenta con algunas propiedades interesantes que justifican una relación bidireccional entre su base semántica y sus cálculos:

Proposición 1 (Corrección)**.** *Sea φ una fbf de L_0. Si φ es teorema de L_0 (i.e. si φ se puede obtener usando, por ejemplo, reglas de deducción de L_0), entonces φ es una tautología$_{\mathsf{L}0}$.*

Proposición 2 (Consistencia)**.** *No existe fbf φ de L_0 t.q. φ y $\neg\,\varphi$ son teoremas de L_0.*

Proposición 3 (Completud)**.** *Sea φ una fbf de L_0. Si φ es una tautología$_{\mathsf{L}0}$, entonces φ es un teorema de L_0.*

Y así, en suma, L_0 es una lógica escalar bien definida que modela relaciones lógicas entre (dos) valores de verdad. Volveremos a este sistema más adelante.

Classes are a matter of truth,
what the properties of things
are; categories are a matter
of sense, how things can be
sensibly characterized
—whether truly or falsely.

— George Englebretsen
Robust Reality

3. La lógica escalar L_{C}

Una categoría se suele entender como una herramienta conceptual que nos permite particionar la estructura de la realidad de acuerdo con la predicación—en el Capítulo 5 haremos algunas aclaraciones sobre este punto.

Siguiendo esta descripción más bien vaga, decimos que un sistema de categorías es una teoría de categorías, una particular ontología. Así, un sistema de categorías es una herramienta ontológica ubicua que nos ayuda a clasificar ítems, ordenar el mundo y construir taxonomías, y al hacerlo, nos previene de cometer errores categoriales.

Un error categorial ocurre cuando a un ítem que pertenece a una determinada categoría se le asigna, de manera inapropiada, un atributo que pertenece a otra categoría. En *The Concept of Mind* Ryle acuñó el concepto y utilizó un *Gedankenexperiment* para explicarlo [Ryl51, p.12].

Así pues, supongamos que una persona visita el Campus Central de UPAEP por primera vez y se le muestran varias bibliotecas, campos de juego, museos, salones y oficinas administrativas. Al final de la visita comenta: "He visto todo, ¿pero dónde está la Universidad?" Al hacer esto, inserta a la Universidad, un ítem de la categoría de instituciones, en la categoría de edificios, confundiendo, así, dos categorías, por lo que comete un error categorial. Por supuesto, el ejemplo anterior no parece tener mayor importancia, pero todo se vuelve más interesante cuando analizamos razonamientos. Consideremos que, por lo general, o por lo menos desde un punto de vista clásico, los razonamientos son productos argumentativos que requieren no solo una estructura válida, sino también enunciados verdaderos, a fin de generar condiciones necesarias y suficientes para la aceptación de una conclusión: cuando un razonamiento cumple con estas dos condiciones decimos que es *sólido*. No obstante, es fácil encontrar

un sinfín de razonamientos clásicamente sólidos que no parecen ser aceptables. Consideremos un ejemplo de juguete:

Ejemplo 1.
1. Si el "sol" es monosilábico, el Sol existe.
2. De hecho, el "sol" es monosilábico.
C. Por tanto, el Sol existe.

El Ejemplo 1 es claramente sólido en el sentido previo porque es válido—es una instancia de un *Modus Ponens*—y sus premisas son verdaderas; sin embargo, también es claro que no es un argumento razonable. Dado este problema, se nos ocurren cuatro alternativas de solución:

- La solución clásica.
- La solución pragmática (*Gricean pragmatics*).
- La solución relevante (*relevance logic*).
- La solución relacional (*relatedness logic*).

La solución clásica consistiría, *grosso modo*, en obviar la situación como si fuera un problema externo, extra lógico. Esta respuesta tiene algo de verdad porque, ciertamente, este no es un problema propio de la lógica clásica, sino de su enseñanza y su uso en la argumentación; sin embargo, esta respuesta no nos convence porque el hecho de que el problema sea externo no implica que no sea un problema: son justamente problemas externos los que han disparado las discusiones sobre la naturaleza de la lógica, o mejor dicho, las lógicas, y su relación con la argumentación. Más aún, una solución como esta nos llevaría a considerar a la solidez, a lo mucho, como una condición necesaria pero no suficiente para la argumentación, por lo que podríamos preguntar, naturalmente: ¿cuál(es) sería(n), entonces, la(s) condición(es) suficiente(s) allende la solidez? La solución clásica no parece tener una respuesta.

Por otro lado, desde un punto de vista pragmático, de sentido común, podríamos simplemente afirmar que la premisa 1 es falsa, que el hecho de que la palabra "sol" sea monosilábica no tiene nada que ver con el Sol, el astro. Esto no es solo cierto, sino que cuenta con respaldo teórico, por ejemplo, en la pragmática de Grice; no obstante,

soluciones de esta naturaleza, aunque pueden resultar útiles a corto plazo, no nos satisfacen porque no son sistemáticas ni están bien definidas. Como argumentaría Mares, estas soluciones pragmáticas son notoriamente vagas porque nos dicen, por ejemplo, que rechacemos ciertos razonamientos (como el Ejemplo 1) porque violan la máxima de "ser relevantes," pero no explican con claridad qué sea la relevancia y, seguramente, si hay teorías más rigurosas o explicativas, sería preferible, *ceteris paribus*, apelar a las más rigurosas o explicativas (cfr. [Mar04, p.16]).

Ahora bien, desde de un punto de vista más riguroso y sistemático podríamos aprovechar una solución relevante o relevantoide. Por ejemplo, según una semántica de este tipo, el ejemplo anterior podría verse como un *Modus Ponens* relevante de la forma:

$$\mathsf{E}\Rightarrow: \frac{\varphi \Rightarrow \psi_{\{1\}} \qquad \varphi_{\{2\}}}{\psi_{\{1,2\}}}$$

Sin embargo, aunque una solución de este tipo pueda ser necesaria, no puede ser suficiente, ya que no hay nada en la sintaxis relevante que nos impida separar a ψ de la conjunción de $\varphi \Rightarrow \psi$ y φ, ya que los subíndices de dicha estructura no están ordenados y, por lo tanto, esta solución, aunque sin duda nos parece más interesante, no puede ofrecer una respuesta contundente a nuestro problema.

No obstante, uno podría insistir en seguir este paradigma y sugerir una solución desde la lógica de las relaciones—*relatedness logic* [Eps13]—que, para este ejemplo, parece ser suficiente, ya que no existe una intersección entre el tema (*subject matter*) del antecedente y el tema del consecuente en el enunciado 1. Sin embargo, si ahora consideramos un ejemplo más complejo, pero aún de juguete—Ejemplo 2—, podemos notar que no está claro cómo un enfoque de este tipo sería más útil que el procedimiento clásico:

Ejemplo 2.
1. Si Tomás es malvado, encontraremos maldad en su cerebro.
2. Pero la maldad no está en el cerebro.
C. Por tanto, Tomás no puede ser malvado.

A diferencia del Ejemplo 1, en este segundo razonamiento podemos observar con claridad que el análisis de la *relatedness logic* (como el de la lógica relevante) no puede ser suficiente, puesto que hay una clara intersección entre los temas de los enunciados y, sin embargo, ¡dicha intersección es justamente el problema!

Así pues, parece que el inconveniente de estos razonamientos no es, propiamente, la solidez, la relevancia o la relación (*relatedness*). ¿Pero, entonces, cuál podría ser el problema? En nuestra opinión, es posible que el problema sea una preocupación de sentido categorial, no de verdad o relevancia. Como afirma Englebretsen, pertenecer a una clase es una cuestión de verdad, pero pertenecer a una categoría es una cuestión de sentido [Eng13, p.17]. Quizá los ejemplos anteriores tienen problemas de sentido categorial, no de veracidad (o, para el caso, de relevancia). Quizá los enfoques anteriores no pueden resolver nuestro problema de manera directa o inmediata porque no estamos lidiando con valores de verdad, sino con errores categoriales: en el Ejemplo 1, en la implicación en el enunciado 1; en el Ejemplo 2, en la interacción de los enunciados 1 y 2.

En consecuencia, dado que estos enfoques—el clásico, el pragmático, el relevante y el de relaciones—no parecen ofrecer una solución exitosa a nuestro problema, y dado que pensamos que dicho problema es de tipo categorial, nuestro compromiso consiste en desarrollar una herramienta formal que tome en cuenta esta motivación. Para hacer esto nuestro primer supuesto es el siguiente:

Postulado 1. *Un razonamiento puede analizarse, al menos, de cuatro maneras.*

De manera general, podemos decir que un razonamiento puede revisarse desde tres puntos de vista [Haa78, p.21], a saber:

- Formal.
- Material.
- Retórico.

A su vez, estos puntos de vista se relacionan con un aspecto analítico, respectivamente, como sigue:

- Sintaxis.

- Semántica.
- Pragmática.

Ahora bien, el segundo aspecto, el semántico, nos permite revisar un razonamiento desde un punto de vista adicional, como el categorial, lo cual parece claro porque todo enunciado declarativo, además de ofrecer un análisis veritativo, pertenece a algún plano categorial (volveremos a este punto en el Capítulo 5).

Con esto en mente podemos bosquejar un sistema lógico escalar para lidiar con planos categoriales. Denotaremos a este sistema como L_C y su vocabulario incluye:

- $VAR_{\mathsf{LC}} = \{\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots\}$
- $CONS_{\mathsf{LC}} = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Su sintaxis se rige por las siguientes reglas de formación:

- *Caso base.* Si $\varphi_i \in VAR_{\mathsf{LC}}$, φ_i es una fbf de L_C.
- *Caso inductivo.* Si φ_i y φ_j son fbfs de L_C, entonces $\neg\varphi_i$, $\varphi_i \wedge \varphi_j$, $\varphi_i \vee \varphi_j$, $\varphi_i \Rightarrow \varphi_j$, $\varphi_i \Leftrightarrow \varphi_j$ son fbfs de L_C.

La semántica de L_C requiere algunas suposiciones adicionales, como que:

Postulado 2. *El conjunto de planos categoriales es numerable.*

Tomando en cuenta esta suposición proponemos que L_C soporta, por lo menos, los siguientes modelos:

- Un modelo ontológico-lingüístico que representa la relación entre la categoría de conceptos y la categoría de hechos (el modelo *A*, por Aristóteles y la distinción entre lo "dicho-de-un-sujeto" y lo que está "en-un-sujeto").
- Un modelo epistémico-doxástico que representa la relación entre la categoría de conocimientos y la categoría de las creencias (el modelo *P*, por Platón y la distinción entre conocimientos y creencias).
- Un modelo modal-alético que representa la relación entre la categoría de la necesidad y la categoría de la posibilidad (el modelo *L*, por Leibniz y la idea de los mundos posibles).

- Un modelo deontológico que representa la relación entre la categoría de las obligaciones y la categoría de las permisiones (el modelo *K*, por Kant y la distinción entre imperativos categóricos y condicionales).
- Y un modelo que relaciona los modelos *A*, *P* y *L* (el modelo *R*, por Ryle y la idea general de error categorial).

Asumiendo el modelo *R* decimos que:

Definición 4 (Asignación). *Una asignación en* L_C *es una función*

$$f : VAR_{\mathsf{L}_\mathsf{C}} \longmapsto \{\top, \bot\}$$

que mapea las variables a un multiconjunto donde $\bot$ *es el valor antidesignado (i.e. el error categorial), y* $\top = \{\sigma, \pi, \delta, o, \varepsilon, \nu\}$ *denota el conjunto de valores designados que representa los planos categoriales del modelo R: conceptos, posibilidades, creencias, hechos, conocimientos y necesidades, respectivamente.*

Con esto podemos decir que:

Definición 5 (Valuación). *Dada una asignación* f, *una valuación* $v_{\mathsf{L}_\mathsf{C}}$ *en* L_C *para las fbfs* φ_i *y* φ_j *verifica: i)* $v_{\mathsf{L}_\mathsf{C}}(\varphi_i) = f(\varphi_i)$, *ii)* $v_{\mathsf{L}_\mathsf{C}}(\neg\varphi_i) = v_{\mathsf{L}_\mathsf{C}}(\varphi_i)$ *y iii)* $v_{\mathsf{L}_\mathsf{C}}(\varphi_i * \varphi_j) = *(v_{\mathsf{L}_\mathsf{C}}(\varphi_i), v_{\mathsf{L}_\mathsf{C}}(\varphi_j))$, *para* $* \in CONS_{\mathsf{L}_\mathsf{C}} / \neg$.

Con esta noción de valuación podemos proceder a definir las constantes. Por mor de brevedad, hagamos los siguientes reemplazos en $\top$: a $\{\sigma\}$, le asignamos el número 4; a $\{\pi, \delta\}$, el 3; a $\{o, \varepsilon\}$, el 2; y a $\{\nu\}$, el 1. Entonces:

Definición 6 (Negación). *La negación de una fbf* φ_i, *i.e.* $\neg\varphi_i$, *se define de manera idempotente:* $v_{\mathsf{L}_\mathsf{C}}(\neg\varphi_i) = v_{\mathsf{L}_\mathsf{C}}(\varphi_i)$, *de tal manera que se obtiene la siguiente matriz:*

φ	$\neg\varphi$
$\bot$	$\bot$
1	1
2	2
3	3
4	4

Cuadro 3.1: Negación de L_C

Esto tiene sentido porque la negación de un error categorial sigue siendo un error categorial, y porque la negación de un enunciado en cierto plano categorial sigue estando en el mismo plano categorial. Por ejemplo, si comenzamos con un error categorial como

"Los números corren alegremente"

su negación,

"Los números no corren alegremente,"

sigue siendo un error categorial. Mientras que un enunciado como

"Los números primos son divisibles entre sí mismos"

y su negación,

"Los números primos no son divisibles entre sí mismos,"

están en el mismo plano categorial.

Definición 7 (Conjunción)**.** *La conjunción de dos fbfs φ_i y φ_j, i.e. $\varphi_i \wedge \varphi_j$, se define como sigue:*

$$v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i \wedge \varphi_j) = \begin{cases} min(v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i), v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_j)), \ si \ v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i), v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_j) \in \top \\ \bot, \ de \ otro \ modo \end{cases}$$

lo que determina la siguiente matriz:

∧	⊥	1	2	3	4
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
1	⊥	1	1	1	1
2	⊥	1	2	2	2
3	⊥	1	2	3	3
4	⊥	1	2	3	4

Cuadro 3.2: Conjunción de $\mathsf{L_C}$

Definimos la conjunción de esta manera porque queremos tener una conjunción conservadora. Cuando conjuntamos enunciados de planos categoriales distintos favorecemos el que tiene más peso para

facilitar la transferencia de información. Por ejemplo, consideremos un enunciado tipo Moore:

"Es verdad que *p* pero creo que no *p*".

Para casos como estos dejamos que el enunciado más fuerte domine. En este caso, $v_{\mathsf{L_C}}(p_2 \wedge \neg p_3) = 2$.

Definición 8 (Disyunción)**.** *La disyunción de dos fbfs φ_i y φ_j, i.e. $\varphi_i \vee \varphi_j$, se define como sigue:*

$$v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i \vee \varphi_j) = \begin{cases} max(v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i), v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_j)), \ si\ v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i), v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_j) \in \top \\ \bot, \ de\ otro\ modo \end{cases}$$

lo que define la siguiente matriz:

∨	⊥	1	2	3	4
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
1	⊥	1	2	3	4
2	⊥	2	2	3	4
3	⊥	3	3	3	4
4	⊥	4	4	4	4

Cuadro 3.3: Disyunción de $\mathsf{L_C}$

Definimos la disyunción de esta manera porque queremos tener una disyunción conservadora. Cuando unimos enunciados de planos categoriales distintos favorecemos el que tiene menor peso para facilitar la transferencia de información. Por ejemplo, consideremos el siguiente enunciado:

"O bien Dios no es necesario o bien Dios es posible."

Para casos como estos dejamos que el enunciado menos fuerte domine. En este caso, $v_{\mathsf{L_C}}(\neg d_1 \vee d_4) = 4$.

Definición 9 (Implicación)**.** *La implicación de dos fbfs φ_i y φ_j, i.e. $\varphi_i \Rightarrow \varphi_j$, se define como sigue:*

$$v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i \Rightarrow \varphi_j) = \begin{cases} v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i),\ si\ v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i) \leq v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_j) \\ \qquad\qquad y\ v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i), v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_j) \in \top \\ \bot,\ de\ otro\ modo \end{cases}$$

lo que define la siguiente matriz:

$\Rightarrow$	$\bot$	1	2	3	4
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
1	$\bot$	1	1	1	1
2	$\bot$	$\bot$	2	2	2
3	$\bot$	$\bot$	$\bot$	3	3
4	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	4

Cuadro 3.4: Implicación de $\mathsf{L_C}$

Definimos la implicación de esta manera para que nos permita definir un orden entre planos categoriales. La topología detrás de este orden implicativo se puede visualizar en la Figura 3.1.

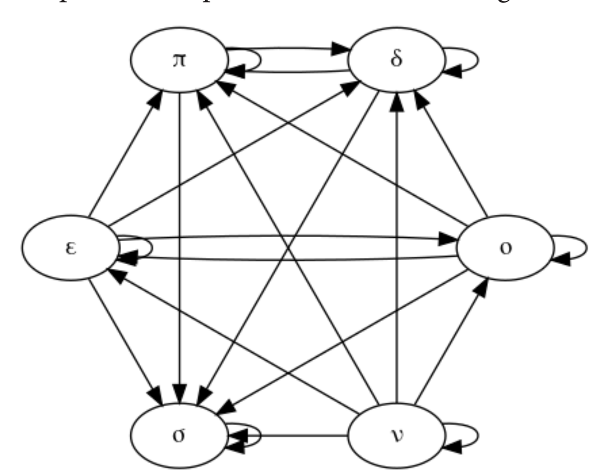


Figura 3.1: Una topología de planos categoriales

Por último, la equivalencia se define como es usual.

Definición 10 (Equivalencia)**.** *La equivalencia de dos fbfs* φ_i *y* φ_j*, i.e.* $\varphi_i \Leftrightarrow \varphi_j$*, se define como sigue:*

$$v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i \Leftrightarrow \varphi_j) = \begin{cases} v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i),\ si\ v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i) = v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_j) \\ \qquad y\ v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i), v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_j) \in \top \\ \bot,\ de\ otro\ modo \end{cases}$$

lo que define la siguiente matriz:

$\Leftrightarrow$	$\bot$	1	2	3	4
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
1	$\bot$	1	$\bot$	$\bot$	$\bot$
2	$\bot$	$\bot$	2	$\bot$	$\bot$
3	$\bot$	$\bot$	$\bot$	3	$\bot$
4	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	4

Cuadro 3.5: Equivalencia de $\mathsf{L_C}$

Pues bien, con estos elementos funcionales podemos construir *matrices categoriales*, herramientas análogas a las tablas de verdad.

Ejemplo 3. *A modo de ejemplo, consideremos* $((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$.

p	$\vee$	q	$\wedge$	$\neg p$	$\Rightarrow$	q
1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	1	1	1	2
1	3	3	1	1	1	3
1	4	4	1	1	1	4
2	2	1	2	2	$\bot$	1
2	2	2	2	2	2	2
2	3	3	2	2	2	3
2	4	4	2	2	2	4
3	3	1	3	3	$\bot$	1
3	3	2	3	3	$\bot$	2
3	3	3	3	3	3	3
3	4	4	3	3	3	4
4	4	1	4	4	$\bot$	1
4	4	2	4	4	$\bot$	2
4	4	3	4	4	$\bot$	3
4	4	4	4	4	4	4

La matriz categorial anterior muestra que $((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$, aunque es una expresión válida en $\mathsf{L_0}$, no puede ser válida en $\mathsf{L_C}$ porque produce un error categorial, un salto categorial injustificado: un

hecho denotado por las filas con un valor antidesignado (por mor de brevedad, omitimos las combinaciones que inician con $\bot$).

Esta última observación nos permite introducir los conceptos de tautología, contradicción y contingencia entre planos categoriales. Así, el concepto de validez categorial se entenderá como es usual, mientras que el de error categorial se entenderá como la contraparte de una expresión que no es tautológica, como sigue:

Definición 11 (Tautología$_{\mathsf{L_C}}$)**.** *Una tautología*$_{\mathsf{L_C}}$ *es una fbf* φ_i *de* $\mathsf{L_C}$ *t.q. para toda valuación* $v_{\mathsf{L_C}}$, $v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i) \in \top$, *i.e., es una fbf sin errores categoriales.*

Definición 12 (Contradicción$_{\mathsf{L_C}}$)**.** *Una contradicción*$_{\mathsf{L_C}}$ *es una fbf* φ_i *de* $\mathsf{L_C}$ *t.q. para toda valuación* $v_{\mathsf{L_C}}$, $v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i) = \bot$, *i.e., es una fbf que siempre comete un error categorial.*

Definición 13 (Contingencia$_{\mathsf{L_C}}$)**.** *Una contingencia*$_{\mathsf{L_C}}$ *es una fbf* φ_i *de* $\mathsf{L_C}$ *que no es tautología*$_{\mathsf{L_C}}$ *ni contradicción*$_{\mathsf{L_C}}$.

Así pues, en suma, $\mathsf{L_C}$ es una lógica escalar que modela relaciones lógicas entre planos categoriales. Volveremos a este sistema más adelante, pero antes comentaremos dos aspectos adicionales relacionados con esta lógica.

En primer lugar, consideremos a $\mathsf{L_{C\urcorner}}$, que es $\mathsf{L_C}$ más una negación adicional que definimos como sigue:

Definición 14 (Denegación)**.** *La denegación de una fbf* φ_i, *i.e.* $\urcorner\varphi_i$, *se define de manera complementaria, de tal manera que se obtiene la siguiente matriz:*

φ	$\urcorner\varphi$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Cuadro 3.6: Denegación de $\mathsf{L_C}$

Una denegación es una negación de orden superior que pretende capturar una diferencia entre la negación de un error categorial (que, como decíamos arriba, sigue siendo un error categorial) y el

rechazo de que un enunciado se encuentre en cierto plano categorial. Denegar es negar (afirmar) que (no) existe un error categorial. Por ejemplo, no es lo mismo

φ := "Los números corren alegremente"

y su negación,

$\neg\varphi$:= "Los números no corren alegremente,"

que su denegación,

$\ulcorner\varphi$:="'Los números corren alegremente' no es un error categorial."

o bien,

$\ulcorner\neg\varphi$:="'Los números no corren alegremente' no es un error categorial."

En efecto, notemos que, si bien $v_{\mathsf{L_C}}(\varphi_i) = v_{\mathsf{L_C}}(\neg\varphi_i) = \bot$, con la denegación ocurre algo diferente: $v_{\mathsf{L_{C\ulcorner}}}(\varphi_i) = v_{\mathsf{L_{C\ulcorner}}}(\neg\,\varphi_i) \neq v_{\mathsf{L_C}}(\ulcorner\,\varphi_i)$. En segundo lugar, esta diferencia entre negación y denegación conlleva las siguientes propiedades de $\mathsf{L_C}$ y $\mathsf{L_{C\ulcorner}}$ que contrastan con las de $\mathsf{L_0}$:

Proposición 4. $\mathsf{L_C}$ *y* $\mathsf{L_{C\ulcorner}}$ *no definen un álgebra booleana.*

Notemos que $\mathsf{L_C}$ como $\mathsf{L_{C\ulcorner}}$, a lo mucho, son álgebras cuasibooleanas, puesto que no verifican las propiedades de elemento simétrico e inverso para $\neg$. Esto nos permite observar que $\mathsf{L_C}$ no tiene un fundamento clásico, y esto importa porque un sistema lógico es clásico cuando, por lo menos, cuenta con una semántica bivalente y un modelo booleano. En consecuencia,

Proposición 5. $\mathsf{L_C}$ *y* $\mathsf{L_{C\ulcorner}}$ *no son sistemas clásicos.*

Ciertamente, como hemos visto hasta aquí, $\mathsf{L_C}$ y $\mathsf{L_{C\ulcorner}}$ tienen una semántica 5-valente y no tienen un modelo booleano. Adicionalmente,

Proposición 6. $\mathsf{L_C}$ *y* $\mathsf{L_{C\ulcorner}}$ *no tienen una interpretación asertórica.*

En efecto, $\mathsf{L_C}$ y $\mathsf{L_{C\ulcorner}}$ no tienen una interpretación asertórica o apofántica porque sus dominios de interpretación no incluyen a los va-

lores lógicos de "lo verdadero" y "lo falso," esto es, sus dominios no son veritativo-funcionales aunque, por supuesto, son funcionales. Y por último, parece que

Proposición 7. L_{C} *no preserva monotonía (en particular,* $\mathsf{L}_{C_{\ulcorner}}$ *no preserva monotonía con respecto a la denegación).*

Un sistema cumple con la propiedad de monotonía si y solo si, si $\Delta \vdash \beta$, entonces de $\Delta \cup \Gamma \vdash \beta$, esto es, si y solo si de un conjunto de premisas Δ podemos obtener β, entonces añadiendo nueva información a Δ, digamos Γ, seguimos obteniendo β. Pero, por contra-ejemplo, supongamos que $\beta = \{\psi_4\}$, $\Delta = \{\varphi_2 \Rightarrow \psi_4, \varphi_2\}$ y $\Gamma = \{\gamma_\perp\}$ (o $\Gamma = \{\ulcorner \psi_4\}$ para $\mathsf{L}_{C_{\ulcorner}}$). Así, aunque $\Delta \vdash \beta$, $\Delta \cup \Gamma \nvdash \beta$, puesto que $\gamma_\perp$ introduce un error categorial (o $v_{\mathsf{L}_{C_{\ulcorner}}}(\ulcorner\varphi_4) = \perp$ para $\mathsf{L}_{C_{\ulcorner}}$).

Combined logics are of interest for at least two reasons. First, they seem a natural way to approach many problems in applied logic. Second, combining logics is something we do all the time: on closer inspection, many existing systems turn out to be combined logics.

— Patrick Blackburn y Maarten de Rijke
Why Combine Logics?

4. La lógica producto $\mathsf{L}_{C\times 0}$

Por razones que se harán evidentes en un momento, necesitamos introducir el sistema $\mathsf{L}_{C\times 0}$ como la lógica producto obtenida de multiplicar las lógicas escalares L_C y L_0. Consideremos entonces, para empezar, las siguientes definiciones.

Definición 15 (Tautología$_{\mathsf{L}C\times 0}$)**.** *Una tautología$_{\mathsf{L}C\times 0}$ es una fbf φ_i de $\mathsf{L}_{C\times 0}$ t.q. para toda valuación $v_{\mathsf{L}C}$ y $v_{\mathsf{L}0}$, $v_{\mathsf{L}C}(\varphi_i) \in \top$ y $v_{\mathsf{L}0}(\varphi_i) = 1$ (donde* 1 *es el valor designado en L_0).*

Definición 16 (Contradicción$_{\mathsf{L}C\times 0}$)**.** *Una contradicción$_{\mathsf{L}C\times 0}$ es una fbf φ_i de $\mathsf{L}_{C\times 0}$ t.q. para toda valuación $v_{\mathsf{L}C}$ y $v_{\mathsf{L}0}$, $v_{\mathsf{L}C}(\varphi_i) = \bot$ y $v_{\mathsf{L}0}(\varphi_i) =$* 0 *(donde* 0 *es el valor antidesignado en L_0).*

Definición 17 (Contingencia$_{\mathsf{L}C\times 0}$)**.** *Una contingencia$_{\mathsf{L}C\times 0}$ es una fbf de $\mathsf{L}_{C\times 0}$ que no es tautología$_{\mathsf{L}C\times 0}$ ni contradicción$_{\mathsf{L}C\times 0}$.*

Claramente, en $\mathsf{L}_{C\times 0}$ los valores asignados a una fbf lucen como productos ordenados de la forma $v \times v'$, donde $v \in \{\top, \bot\}$ y $v' \in \{1, 0\}$. Para ilustrar esto consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4. *Reconsideremos nuestro ejemplo original:*

1. Si el "sol" es monosilábico, el Sol existe.
2. De hecho, el "sol" es monosilábico.

C. Por tanto, el Sol existe.

Considerando los planos categoriales implicados en este razonamiento, tenemos las siguientes representaciones (Cuadros 4.1 y 4.2, y Diagrama 4.1):

1. $p_4 \Rightarrow q_2$
2. p_4

C. q_2

Cuadro 4.1: Formalización del Ejemplo 4

p_4	$\Rightarrow$	q_2	$\wedge$	p_4	$\Rightarrow$	q_2
4	$\bot$	2	$\bot$	4	$\bot$	2

Cuadro 4.2: Matriz categorial del Ejemplo 4

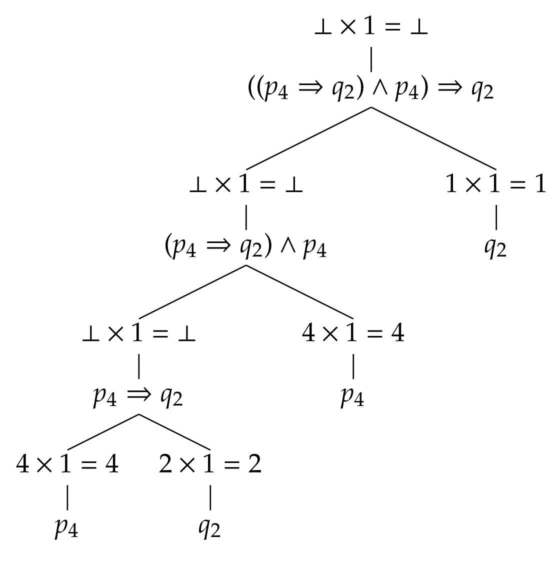


Diagrama 4.1: Árbol del Ejemplo 4

El Diagrama 4.1 muestra que aunque este razonamiento es válido en L_0 *(después de todo, es una instancia de Modus Ponens, como se puede ver en el Cuadro 4.1) y sólido (pues las premisas son verdaderas), comete un salto categorial injustificado (i.e., es inválido en* L_C*, como se observa también en el Cuadro 4.2), lo que explica por qué el razonamiento no es aceptable.*

Por lo tanto, observemos que si tuviéramos que considerar la fuerza del Ejemplo 4 únicamente sobre la base de L_C, obtendríamos un razonamiento inválido; pero si tuviéramos que evaluarlo usando únicamente los principios de L_0, obtendríamos un razonamiento válido. Esta observación nos permite generar las siguientes combinaciones de (in)validez para $\mathsf{L}_{C\times 0}$ (Cuadro 4.3).

válido_{L_C}	$\times$	válido_{L_0}	$=$	$\text{válido}_{L_{C\times 0}}$
válido_{L_C}	$\times$	inválido_{L_0}	$=$	$\text{inválido}_{L_{C\times 0}}$
inválido_{L_C}	$\times$	válido_{L_0}	$=$	$\text{inválido}_{L_{C\times 0}}$
inválido_{L_C}	$\times$	inválido_{L_0}	$=$	$\text{inválido}_{L_{C\times 0}}$

Cuadro 4.3: Combinaciones de (in)validez

El ejemplo previo ilustra el tercer renglón de estas combinaciones. Para ilustrar las combinaciones restantes consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5. *Segunda combinación. Tomemos una Falacia de Afirmación del Consecuente sin errores categoriales:*

1. Si es necesario que p, q tiene sentido.
2. De hecho, q tiene sentido.
C. Por tanto, p es necesario.

Considerando los planos categoriales implicados en este razonamiento, tenemos las siguientes representaciones (Cuadros 4.4 y 4.5, y Diagrama 4.2):

1. $p_1 \Rightarrow q_4$
2. q_4
C. p_1

Cuadro 4.4: Formalización del Ejemplo 5

p_1	$\Rightarrow$	q_4	$\wedge$	q_4	$\Rightarrow$	p_1
1	1	4	1	4	1	1

Cuadro 4.5: Matriz categorial del Ejemplo 5

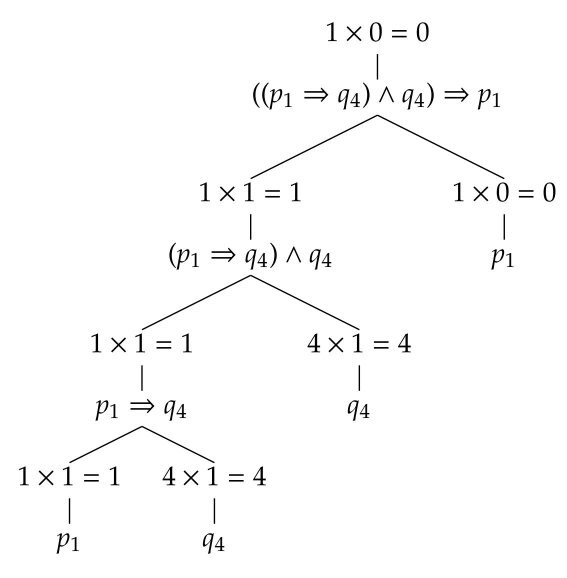


Diagrama 4.2: Árbol del Ejemplo 5

El Diagrama 4.2 muestra que aunque este razonamiento es válido en L_C *(después de todo, no produce errores categoriales, como se puede ver en el Cuadro 4.5), es inválido en* L_0 *(como se observa en el Cuadro 4.4), lo que explica por qué el razonamiento no es aceptable.*

Ejemplo 6. *Cuarta combinación. Consideremos un razonamiento inválido en ambos sistemas escalares:*

1. Si se sabe que p, q es necesario.
2. De hecho, q es necesario.
C. Por tanto, se sabe que p.

Considerando los planos categoriales implicados en este razonamiento, tenemos las siguientes representaciones (Cuadros 4.6 y 4.7, y Diagrama 4.3):

1. $p_2 \Rightarrow q_1$
2. q_1
C. p_2

Cuadro 4.6: Formalización del Ejemplo 6

p_2	$\Rightarrow$	q_1	$\wedge$	q_1	$\Rightarrow$	p_2
2	$\bot$	1	$\bot$	1	$\bot$	2

Cuadro 4.7: Matriz categorial del Ejemplo 6

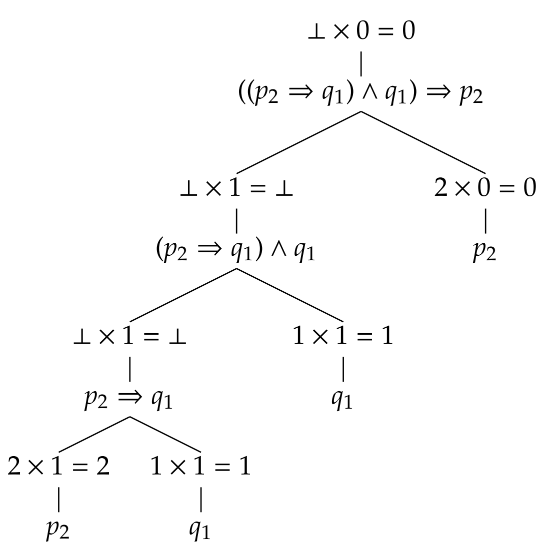


Diagrama 4.3: Árbol del Ejemplo 6

El Diagrama 4.3 ilustra que este razonamiento es inválido tanto en L_C *(Cuadro 4.7) como en* L_0 *(Cuadro 4.6).*

Ejemplo 7. *Primera combinación. Por último, consideremos un razonamiento válido en ambos sistemas escalares:*

1. Si se sabe que p, q es un hecho.
2. De hecho, p es necesario.

C. Por tanto, es creíble que q.

Considerando los planos categoriales implicados en este razonamiento, tenemos las siguientes representaciones (Cuadros 4.8 y 4.9, y Diagrama 4.4):

1. $p_2 \Rightarrow q_2$
2. p_1

C. q_3

Cuadro 4.8: Formalización del Ejemplo 7

p_2	$\Rightarrow$	q_2	$\wedge$	p_1	$\Rightarrow$	q_3
2	2	2	1	1	1	3

Cuadro 4.9: Matriz categorial del Ejemplo 7

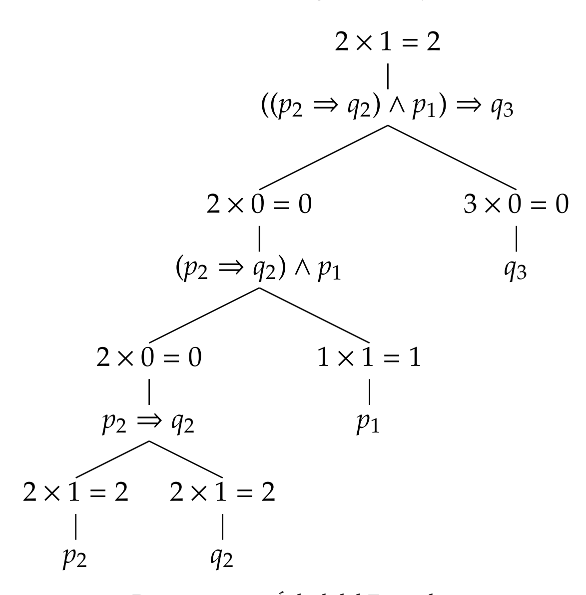


Diagrama 4.4: Árbol del Ejemplo 7

El Diagrama 4.4 ilustra que este razonamiento es válido tanto en L_{C} *(Cuadro 4.9) como en* L_0 *(Cuadro 4.8).*

Con todo, en este punto debería ser claro que la complejidad computacional de esta lógica producto compromete su utilidad. Por tanto, para facilitar su uso, a continuación definimos unas reglas al estilo de un sistema de deducción natural.

Definición 18 (Deducción)**.** *Sea* Γ *un conjunto de fbfs de* $\mathsf{L}_{\mathsf{C}\times 0}$ *y sea* φ_i *una fbf de* $\mathsf{L}_{\mathsf{C}\times 0}$*. Decimos que* $\Gamma \vdash_{\mathsf{L}_{\mathsf{C}\times 0}} \varphi_i$ *es una deducción de* φ_i *a partir de* Γ *si y solo si i)* $\varphi_i \in \Gamma$ *o ii)* φ_i *se obtiene de miembros de* Γ *aplicando una regla de* $\mathsf{L}_{\mathsf{C}\times 0}$*.*

Antes de introducir tales reglas debemos comentar dos aspectos de la notación. Primero, cuando la inferencia es válida para cualquier plano categorial, omitimos los subíndices; y segundo, cuando usa-

mos la expresión $(\varphi * \psi)_i$, para $* \in CONS_{\mathsf{LC}}/\neg$, queremos decir que el valor de tal fbf es el plano categorial i (Cuadro 4.10).

$$\text{I}\wedge: \frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi} \qquad\qquad \text{E}\wedge: \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$$

$$\text{I}\vee: \frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad\qquad \text{E}\vee: \frac{\varphi_i \vee \psi_k \qquad \begin{matrix}[\varphi_i]\\ \vdots \\ \gamma_{j\geq i}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi_k]\\ \vdots \\ \gamma_{m\geq k}\end{matrix}}{\gamma_{max(j,m)}}$$

$$\text{I}\Rightarrow: \frac{\begin{matrix}[\varphi_i]\\ \vdots \\ \psi_{j\geq i}\end{matrix}}{\varphi_i \Rightarrow \psi_{j\geq i}} \qquad\qquad \text{E}\Rightarrow: \frac{\varphi_i \Rightarrow \psi_{j\geq i} \qquad \varphi_i}{\psi_{j\geq i}}$$

$$\text{I}\neg: \frac{\begin{matrix}[\varphi_i]\\ \vdots \\ (\psi \wedge \neg\psi)_{j\geq i}\end{matrix}}{\neg\varphi_i} \qquad\qquad \text{E}\neg: \frac{\begin{matrix}[\neg\varphi_i]\\ \vdots \\ (\psi \wedge \neg\psi)_{j\geq i}\end{matrix}}{\varphi_i}$$

Cuadro 4.10: Reglas de deducción natural de $\mathsf{L}_{C\times 0}$

De manera más precisa, podemos identificar tres tipos de reglas: estructurales, de inferencia y de equivalencia.

Contamos con tres reglas estructurales:

Definición 19 (Introducción de hipótesis (h))**.** *Una fbf φ_i puede introducirse como hipótesis en una prueba.*

Definición 20 (Repetición (rep))**.** *Una fbf φ_i puede repetirse en una prueba.*

Definición 21 (Iteración (it))**.** *Una fbf φ_i puede iterarse en una prueba hipotética.*

Con las siguientes reglas de inferencia:

Definición 22 (Introducción de $\Rightarrow$)**.**

1	φ_i	h
2	$\vdots$	
3	$\psi_{j\geq i}$	h
4	$\varphi_i \Rightarrow \psi_{j\geq i}$	I⇒ **1-3**

Definición 23 (Eliminación de ⇒ (*Modus Ponens*))**.**

1	$\varphi_i \Rightarrow \psi_{j\geq i}$	h
2	φ_i	h
3	$\psi_{j\geq i}$	E⇒ **1,2**

Definición 24 (Eliminación de ⇒ (*Modus Tollens*))**.**

1	$\varphi_i \Rightarrow \psi_{j\geq i}$	h
2	$\neg\psi_{j\geq i}$	h
3	$\neg\varphi_i$	E⇒ **1,2**

Definición 25 (Silogismo hipotético)**.**

1	$\varphi_i \Rightarrow \psi_{j\geq i}$	h
2	$\psi_j \Rightarrow \gamma_{k\geq j}$	h
3	$\varphi_i \Rightarrow \gamma_{k\geq j}$	SH **1,2**

Definición 26 (Introducción de ∧)**.**

1	φ	h
2	ψ	h
3	$\varphi \wedge \psi$	I∧ **1,2**

Definición 27 (Eliminación de ∧)**.**

1	$\varphi \wedge \psi$	h
2	φ	E∧ **1**
3	ψ	E∧ **1**

Definición 28 (Introducción de ∨)**.**

1	φ	h
2	$\varphi \vee \psi$	I∨ **1**

Definición 29 (Eliminación de ∨)**.**

1	$\varphi_i \vee \psi_k$	h
2	$\varphi_i \Rightarrow \gamma_{j \geq i}$	h
3	$\psi_k \Rightarrow \gamma_{m \geq k}$	h
4	$\gamma_{max(j,m)}$	E∨ **1,2,3**

Definición 30 (Silogismo disyuntivo)**.**

1	$\varphi_i \vee \psi_j$	h
2	$\neg\varphi_{i \leq j}$	h
3	ψ_j	SD **1,2**

Y las siguientes reglas de equivalencia:

Definición 31 (Teoremas de De Morgan)**.**

$$\neg(\varphi_i \vee \psi_i) \equiv (\neg\varphi_i \wedge \neg\psi_i)$$

$$\neg(\varphi_i \wedge \psi_i) \equiv (\neg\varphi_i \vee \neg\psi_i)$$

Definición 32 (Conmutación)**.**

$$(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$$

$$(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$$

Definición 33 (Asociación)**.**

$$\varphi \vee (\psi \vee \gamma) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \gamma$$

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \gamma) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \gamma$$

Definición 34 (Distribución)**.**

$$\varphi \vee (\psi \wedge \gamma) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma)$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \gamma) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \gamma)$$

Definición 35 (Doble negación)**.**

$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$$

Definición 36 (Transposición)**.**

$$\varphi_i \Rightarrow \psi_i \equiv \neg\psi_i \Rightarrow \neg\varphi_i$$

Definición 37 (Implicación)**.**

$$\varphi_i \Rightarrow \psi_i \equiv \neg\varphi_i \vee \psi_i$$

Ahora, con estos elementos intentaremos mostrar que:

Proposición 8 (Tautologicidad)**.** *Las reglas de inferencia de* $\mathsf{L}_{\mathsf{C}\times 0}$ *son tautologías*$_{\mathsf{L}_{\mathsf{C}\times 0}}$.

Demostración. Por construcción. Si desarrollamos la matriz categorial de cada regla de inferencia obtenemos tautologías$_{\mathsf{L}_{\mathsf{C}\times 0}}$, como sigue (por mor de brevedad, asumimos que cada regla es una tautología$_{\mathsf{L}_0}$):

φ	ψ	$\Rightarrow$	φ	$\wedge$	ψ
1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	2
1	3	1	1	1	3
1	4	1	1	1	4
2	1	1	2	1	1
2	2	2	2	2	2
2	3	2	2	2	3
2	4	2	2	2	4
3	1	1	3	1	1
3	2	2	3	2	2
3	3	3	3	3	3
3	4	3	3	3	4
4	1	1	4	1	1
4	2	2	4	2	2
4	3	3	4	3	3
4	4	4	4	4	4

φ	$\wedge$	ψ	$\Rightarrow$	φ
1	1	1	1	1
1	1	2	1	1
1	1	3	1	1
1	1	4	1	1
2	1	1	1	2
2	2	2	2	2
2	2	3	2	2
2	2	4	2	2
3	1	1	1	3
3	2	2	2	3
3	3	3	3	3
3	3	4	3	3
4	1	1	1	4
4	2	2	2	4
4	3	3	3	4
4	4	4	4	4

φ	$\Rightarrow$	φ	$\vee$	ψ
1	1	1	1	1
1	1	1	2	2
1	1	1	3	3
1	1	1	4	4
2	2	2	2	1
2	2	2	2	2
2	2	2	3	3
2	2	2	4	4
3	3	3	3	1
3	3	3	3	2
3	3	3	3	3
3	3	3	4	4
4	4	4	4	1
4	4	4	4	2
4	4	4	4	3
4	4	4	4	4

φ_i	$\Rightarrow$	$\psi_{j\geq i}$	$\wedge$	φ_i	$\Rightarrow$	$\psi_{j\geq i}$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1	2
1	1	3	1	1	1	3
1	1	4	1	1	1	4
2	2	2	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	3
2	2	4	2	2	2	4
3	3	3	3	3	3	3
3	3	4	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4	4

φ_i	$\Rightarrow$	$\psi_{j\geq i}$	$\wedge$	$\neg\psi_{j\geq i}$	$\Rightarrow$	$\neg\varphi_i$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1	1
1	1	3	1	1	1	1
1	1	4	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2
2	2	4	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
3	3	4	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4

φ_i	$\vee$	ψ_j	$\wedge$	$\neg\varphi_{i\leq j}$	$\Rightarrow$	ψ_j
1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	1	1	1	2
1	3	3	1	1	1	3
1	4	4	1	1	1	4
2	2	2	2	2	2	2
2	3	3	2	2	2	3
2	4	4	2	2	2	4
3	3	3	3	3	3	3
3	4	4	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4	4

φ_i	$\Rightarrow$	$\psi_{j\geq i}$	$\wedge$	ψ_j	$\Rightarrow$	$\gamma_{k\geq i}$	$\Rightarrow$	φ_i	$\Rightarrow$	$\gamma_{k\geq i}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	3
1	1	1	1	1	1	4	1	1	1	4
1	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2
1	1	2	1	2	2	3	1	1	1	3
1	1	2	1	2	2	4	1	1	1	4
1	1	3	1	3	3	3	1	1	1	3
1	1	3	1	3	3	4	1	1	1	4
1	1	4	1	4	4	4	1	1	1	4
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	3
2	2	2	2	2	2	4	2	2	2	4
2	2	3	2	3	3	3	2	2	2	3
2	2	3	2	3	3	4	2	2	2	4
2	2	4	2	4	4	4	2	2	2	4
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	4	3	3	3	4
3	3	4	3	4	4	4	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

φ_i	$\vee$	ψ_k	$\wedge$	φ_i	$\Rightarrow$	$\gamma_{j\geq i}$	$\wedge$	ψ_k	$\Rightarrow$	$\gamma_{m\geq k}$	$\Rightarrow$	$\gamma_{max(j,m)}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2
1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	3	1	3
1	1	1	1	1	1	4	1	1	1	4	1	4
1	2	2	1	1	1	2	1	2	2	2	1	2
1	2	2	1	1	1	3	1	2	2	3	1	3
1	2	2	1	1	1	4	1	2	2	4	1	4
1	3	3	1	1	1	3	1	3	3	3	1	3
1	3	3	1	1	1	4	1	3	3	4	1	4
1	4	4	1	1	1	4	1	4	4	4	1	4
2	2	1	1	2	2	2	1	1	1	2	1	2
2	2	1	1	2	2	3	1	1	1	3	1	3
2	2	1	1	2	2	4	1	1	1	4	1	4
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	3	2	3
2	2	2	2	2	2	4	2	2	2	4	2	4
2	3	3	2	2	2	3	2	3	3	3	2	3
2	3	3	2	2	2	4	2	3	3	4	2	3
2	4	4	2	2	2	4	2	4	4	4	2	4
3	3	1	3	3	3	3	3	1	1	3	3	3
3	3	1	3	3	3	4	3	1	1	4	3	4
3	3	2	2	3	3	3	2	2	2	3	2	3
3	3	2	2	3	3	4	2	2	2	4	2	4
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	4	3	3	3	4	3	4
3	4	4	3	3	3	4	3	4	4	4	3	4
4	4	1	1	4	4	4	1	1	1	4	1	4
4	4	2	2	4	4	4	2	2	2	4	2	4
4	4	3	3	4	4	4	3	3	3	4	3	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Por último, para justificar la introducción de $\Rightarrow$ la prueba es similar a la introducción $\Rightarrow$ de para L_0, pero controlando que los índices del antecedente (i.e. la hipótesis en una prueba hipotética) sean menores o iguales que los del consecuente.

Proposición 9 (Corrección)**.** *Si* $\Gamma \vdash_{\text{L}_{C\times0}} \varphi_i$*,* φ_i *es una tautología*$_{\text{L}_{C\times0}}$ *(i.e.* $\vDash_{\text{L}_{C\times0}} \varphi_i$*).*

Demostración. Por inducción en el tamaño de una deducción. Para el caso base, si Γ tiene un único elemento, entonces $\varphi_i \in \Gamma$, en cuyo caso $\Gamma \vDash_{\text{L}_{C\times0}} \varphi_i$. Para el caso inductivo, consideremos una fbf arbitraria φ_i obtenida por reglas de inferencia en menos de *n* pasos a partir de fbfs previas en Γ. Para el caso de las reglas de introducción y eliminación tales fbfs previas tendrían que ser de la forma ψ_i y (φ

$* \ \psi)_i$, para $* \in CONS/\neg$. Entonces, por hipótesis de inducción, $\Gamma \vDash_{\text{L}_{C\times0}} \psi_i$ y $\Gamma \vDash_{\text{L}_{C\times0}} (\psi * \varphi)_i$, y como cada regla de inferencia preserva tautologicidad (Proposición 8), podemos deducir φ_i en n pasos, por lo que $\Gamma \vDash_{\text{L}_{C\times0}} \varphi_i$.

Ahora, para las reglas de la negación, φ_i se tiene que obtener en menos de n pasos de $\bot$ o de $\bot \cup \{\neg\varphi_i\}$. En el primer caso, $\bot \in \Gamma$, de tal modo que $\Gamma \vDash_{\text{L}_{C\times0}} \varphi_i$, pero como $v_{\text{L}_{C\times0}}(\bot) = \bot \times 0$ para toda valuación $v_{\text{L}_{C\times0}}$, no existe una valuación $v_{\text{L}_{C\times0}}(\psi) = \top \times 1$ para cualquier $\psi \in \Gamma$. Ahora, sea $\Gamma' = \Gamma \cup \bot$ pero supongamos que $\Gamma' \vDash_{\text{L}_{C\times0}} \varphi_i$, entonces $v_{\text{L}_{C\times0}}(\psi) = \top \times 1$ para cualquier $\psi \in \Gamma'$ y $v_{\text{L}_{C\times0}}(\varphi_i) = \bot \times 0$ para alguna valuación; pero si Γ' incluye a $\Gamma \cup \bot$, obtenemos una contradicción. Para el caso restante, consideremos que Γ incluye tanto a $\bot$ como a $\neg\varphi_i$. Sea $\Gamma' = \Gamma \cup \bot$ y supongamos $\Gamma' \vDash_{\text{L}_{C\times0}} \varphi_i$, entonces existe una valuación $v_{\text{L}_{C\times0}}(\psi) = \top \times 1$ para cualquier $\psi \in \Gamma'$, pero $v_{\text{L}_{C\times0}}(\varphi_i) = \bot \times 0$. Ahora, sea $\Gamma'' = \Gamma' \cup \{\neg\varphi_i\}$, de tal modo que Γ'' contiene la deducción de Γ' tal que $v_{\text{L}_{C\times0}}(\psi) = \top \times 1$ para cualquier $\psi \in \Gamma''$, lo cual no es posible porque, como $\Gamma'' \vDash_{\text{L}_{C\times0}} \bot$, $\Gamma \vDash_{\text{L}_{C\times0}} \varphi_i$.

Proposición 10 (Consistencia)**.** *No existe fbf φ_i tal que $\vdash_{\text{L}_{C\times0}} \varphi_i$ y $\vdash_{\text{L}_{C\times0}} \neg\varphi_i$.*

Demostración. Por *reductio*, supongamos que tanto $\Gamma \vdash_{\text{L}_{C\times0}} \varphi_i$ como $\Gamma \vdash_{\text{L}_{C\times0}} \neg\varphi_i$. Luego, por la Proposición 9, $\Gamma \vDash_{\text{L}_{C\times0}} \varphi_i$ y $\Gamma \vDash_{\text{L}_{C\times0}} \neg\varphi_i$. Por tanto, para toda valuación $v_{\text{L}_{C\times0}}$, $v_{\text{L}_{C\times0}}(\varphi_i) = \top \times 1$ y $v_{\text{L}_{C\times0}}(\neg\varphi_i) = \top \times 1$, lo cual es absurdo.

Proposición 11 (Completud)**.** *Si φ es una tautología$_{\text{L}_{C\times0}}$, φ es una deducción (i.e. $\vdash_{\text{L}_{C\times0}} \varphi_i$).*

Demostración. Llamemos L^+ a una extensión de $\text{L}_{C\times0}$ que resulta de añadir una nueva regla de inferencia de tal manera que todas las reglas de $\text{L}_{C\times0}$ se conservan. Por las propiedades de L_0 (*vide* Proposición 2), L^+ es una extensión consistente porque existe una fbf que no es una deducción de L^+. En efecto, si toda fbf fuera una deducción de L^+, toda fbf sería teorema de L^+, lo cual contradice la Proposición 10.

Ahora bien, podemos generar una extensión máximamente consistente L^{+n}. En efecto, si la fbf φ^1 no es una deducción de L^{+1}, enton-

ces L^{+2} , la extensión de L^{+1} que resulta de añadir $\neg\varphi_i^1$ como deducción, es consistente (por lo dicho arriba). Y como es posible hacer esto *n* veces, en efecto, L^{+^n} es máximamente consistente.

Adicionalmente, L^{+n} resulta ser una extensión máximamente consistente y completa. Claramente, es consistente por el razonamiento anterior, pero es completa porque, para toda fbf, o bien φ_i o bien $\neg\varphi_i$ son deducciones de L^{+n} . En efecto, si φ_i no es una deducción, tiene que existir un n tal que $\neg\varphi_i$ es una deducción de L^{+n} ; y si φ_i es una deducción de L^{+n} , tiene que existir un $k \leq n$ tal que φ_i es deducción de L^{+k} .

Pues bien, como L^{+n} es una extensión máximamente consistente y completa, podemos definir una noción de valuación $v_{\mathsf{L}^{+n}}$ tal que $v_{\mathsf{L}^{+n}}(\varphi_i) = \top \times 1$ significa que $\vdash_{\mathsf{L}^{+n}} \varphi_i$ y $v_{\mathsf{L}^{+n}}(\varphi_i) = \bot \times 0$ significa que $\nvdash_{\mathsf{L}^{+n}} \varphi_i$, esto es, existe una valuación en la cual toda deducción adquiere valores designados.

Entonces, finalmente, supongamos por *reductio* que φ_i es una tautología$_{\mathsf{LC}\times0}$ pero no es una deducción, i.e., $\nvdash_{\mathsf{LC}\times0} \varphi_i$. Si esto es el caso, entonces la extensión L^{+} que resulta de añadir $\neg\varphi_i$ es consistente. Luego, debe existir una valuación $v_{\mathsf{LC}\times0}$ que asigna a cada deducción de L^{+} el valor designado, $\top \times 1$, en particular, $v_{\mathsf{LC}\times0}(\neg\varphi_i) = \top \times 1$, pero esto contradice la suposición de que φ_i es una tautología$_{\mathsf{LC}\times0}$.

Y así, hasta aquí hemos bosquejado una lógica producto para modelar relaciones lógicas entre valores de verdad y planos categoriales.

Por último, para cerrar este capítulo y ejemplificar el uso de esta lógica, consideremos algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 8.

1. Es falso que *p* en categoría ontológica o que *q* en categoría epistémica.
2. Si no es el caso que *a* en categoría de posibilidad y *b* en categoría de necesidad, entonces *p* en categoría ontológica.
3. Si *a* en posibilidad, entonces *x* en categoría lingüística.

C. *x* en categoría lingüística.

1		$\neg(p_2 \vee q_2)$	h
2		$\neg(a_3 \wedge b_1) \Rightarrow p_2$	h
3		$a_3 \Rightarrow x_4$	h
4		$\neg p_2 \wedge \neg q_2$	DM **1**
5		$\neg p_2$	E$\wedge$ **4**
6		$\neg\neg(a_3 \wedge b_1)$	E $\Rightarrow$ **2,5**
7		$a_3 \wedge b_1$	DN **6**
8		a_3	E$\wedge$ **7**
9		x_4	E $\Rightarrow$ **3,8**

Cuadro 4.11: Formalización del Ejemplo 8

Ejemplo 9.
1. O bien crees en la existencia de Dios o bien Dios existe.
2. Pero no crees en la existencia de Dios.
C. Por tanto, Dios existe.

1		$p_3 \vee q_2$	h
2		$\neg p_3$	h
3		q_2	*Incorrecto*

Cuadro 4.12: Formalización del Ejemplo 9

p_3	$\vee$	q_2	$\wedge$	$\neg p_3$	$\Rightarrow$	q_2
3	3	2	3	3	$\perp$	2

Cuadro 4.13: Matriz categorial del Ejemplo 9

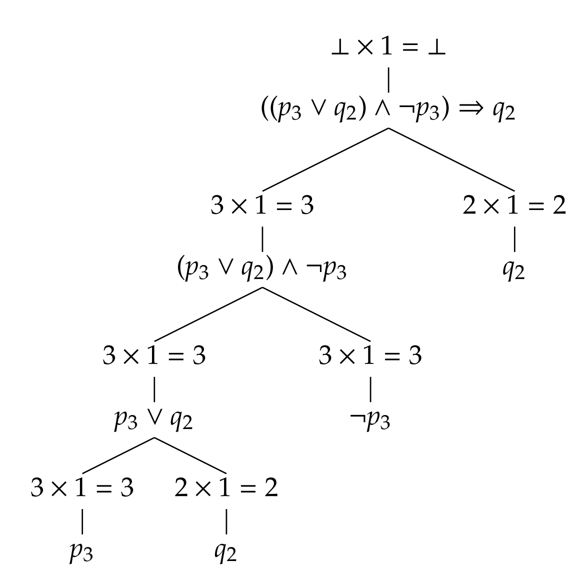


Diagrama 4.5: Árbol del Ejemplo 9

Ejemplo 10.
1. El nombre "Ser" tiene muchos significados.
2. Todos son significados de la realidad.
C. Por tanto, la realidad es multívoca.

1	$p_4 \Rightarrow q_4$	h
2	$q_4 \Rightarrow r_2$	h
3	$r_2 \Rightarrow q_4$	*Incorrecto*

Cuadro 4.14: Formalización del Ejemplo 10

p_4	$\Rightarrow$	q_4	$\wedge$	q_4	$\Rightarrow$	r_2	$\Rightarrow$	r_2	$\Rightarrow$	q_4
4	4	4	$\bot$	4	$\bot$	2	$\bot$	2	2	4

Cuadro 4.15: Matriz categorial del Ejemplo 10

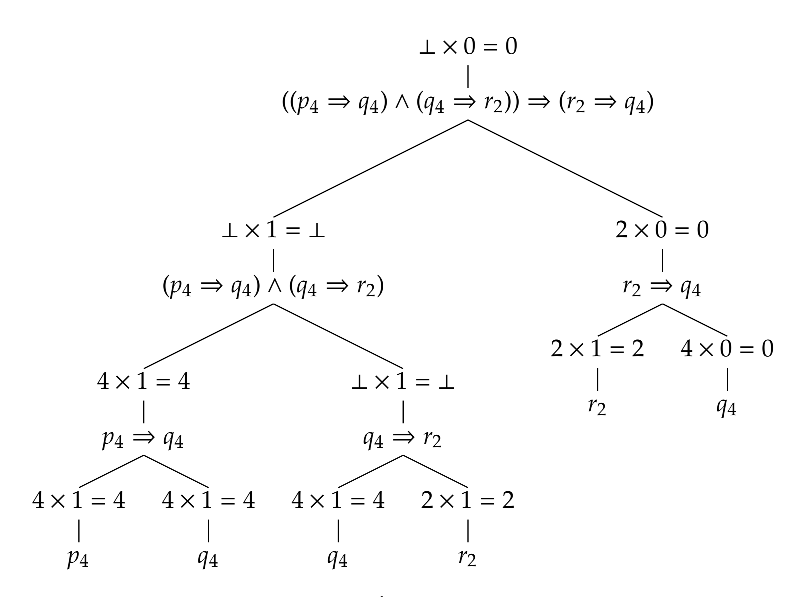


Diagrama 4.6: Árbol del Ejemplo 10

Ejemplo 11.
1. Si Tomás es malvado, encontraremos maldad en su cerebro.
2. Pero la maldad no está en el cerebro.
C. Por tanto, Tomás no puede ser malvado.

1	$p_2 \Rightarrow q_\bot$	h
2	$\neg q_\bot$	h
3	$\neg p_2$	*Incorrecto*

Cuadro 4.16: Formalización del Ejemplo 11

p_2	$\Rightarrow$	$q_\bot$	$\wedge$	$\neg q_\bot$	$\Rightarrow$	$\neg p_2$
2	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	2

Cuadro 4.17: Matriz categorial del Ejemplo 11

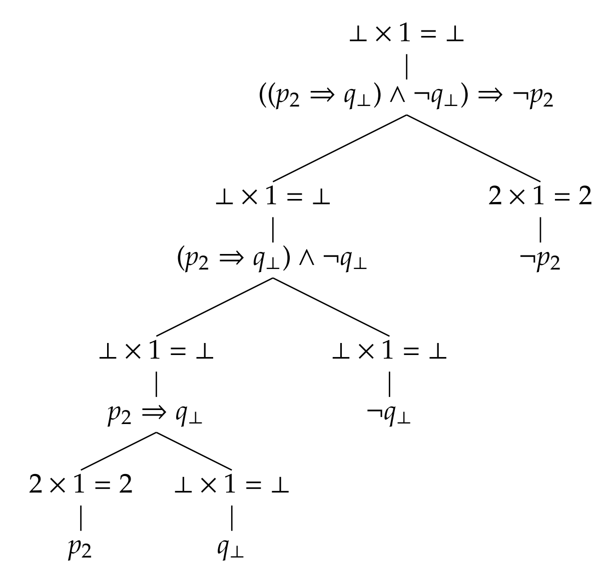


Diagrama 4.7: Árbol del Ejemplo 11

Ejemplo 12. | 1. Las definiciones limitan la realidad.

1	$p_4 \Rightarrow q_2$	h

Cuadro 4.18: Formalización del Ejemplo 12

p_4	$\Rightarrow$	q_2
4	$\bot$	2

Cuadro 4.19: Matriz categorial del Ejemplo 12

$\bot \times 1 = \bot$

$p_4 \Rightarrow q_2$

$4 \times 1 = 4$ $2 \times 1 = 2$

p_4 q_2

Diagrama 4.8: Árbol del Ejemplo 12

Ejemplo 13.
1. Las computadoras calculan.
2. Calcular implica pensar.
C. Luego, las computadoras piensan.

1	$p_2 \Rightarrow q_3$	h
2	$q_3 \Rightarrow r_3$	h
3	$p_2 \Rightarrow r_3$	SH **1,2**

Cuadro 4.20: Formalización del Ejemplo 13

p_2	$\Rightarrow$	q_3	$\wedge$	q_3	$\Rightarrow$	r_3	$\Rightarrow$	p_2	$\Rightarrow$	r_3
2	2	3	2	3	3	3	2	2	2	3

Cuadro 4.21: Matriz categorial del Ejemplo 13

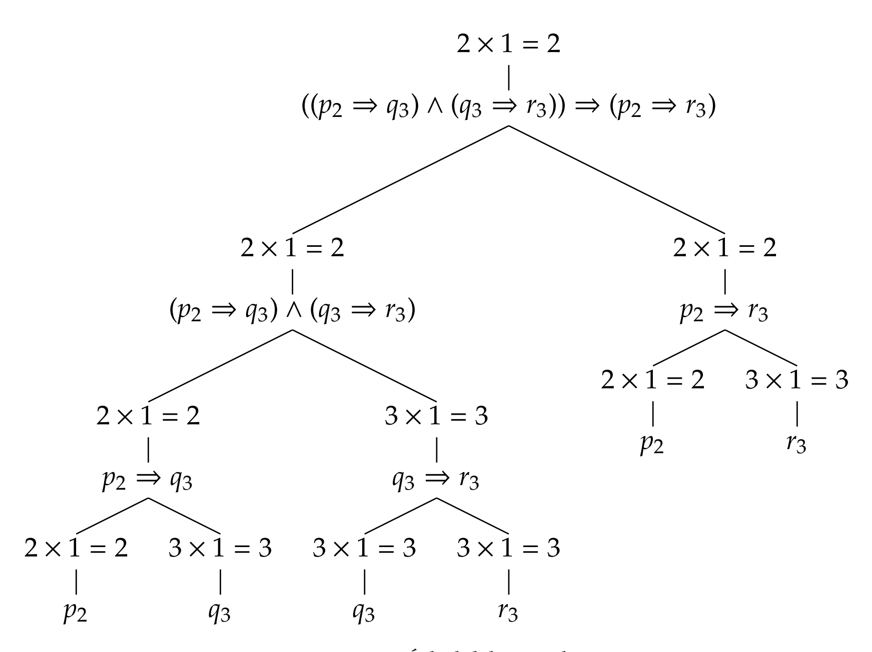


Diagrama 4.9: Árbol del Ejemplo 13

There is no mathematical substitute for philosophy.

— Saul Kripke
Is there a problem about substitutional quantification?

5. Antecedentes

Los conceptos *plano categorial*, *error categorial* y *salto categorial* que hemos usado hasta aquí como primitivos son relativamente nuevos, pero no se han generado *ex nihilo*—mencionaremos algo más sobre su origen en las Conclusiones. Para observar su génesis consideremos su antecedente natural: la noción filosófica de *categoría*.

Al parecer, originalmente, los términos κατεγορία, κατέγορος y κατεγορέο no fueron usados en un sentido ontológico, mucho menos lógico. Así, por ejemplo, hay evidencia de que Esquilo (*Los siete contra Tebas*, 439) usó estos términos con la connotación "que revela;" de que Herodoto los usó en el sentido de "traición" (Libro III, 71); y de que Platón los usó en sentidos similares (*Gorgias*, 480d).

Así pues, el término adquirió el significado de "acusación," por lo que, en algún momento, una *categoría* se oponía a una *apología*; sin embargo, no fue sino hasta el *Teeteto* y el *Sofista* que el término se usó con una connotación ontológica, en particular cuando los conceptos *ser* e *igualdad* fueron tomados como clases supremas de la realidad. Desde entonces, las categorías suelen usarse como conceptos generales que nos permiten clasificar ítems según ciertos parámetros de predicación.

Con todo, ahora es un lugar común aceptar que Aristóteles fue el primero en ofrecer una visión sistemática del concepto de categoría. Así, en *Tópicos* 107, el término en cuestión se suele interpretar como "denotación," y en *Metafísica* 1016b y *Categorías* 9a27, 11b37 y 11b7, como "predicación." De manera especial, es en *Categorías* donde Aristóteles dividió a los términos en dos clases:

- Términos sin enlace (v. gr. "humán," "jugador") y
- términos con enlace (v. gr. un humán "es" jugador).

En terminología lógica medieval, esta es la división entre términos categoremáticos y sincategoremáticos; en terminología lógica contemporánea, esta clasificación se asemeja a nuestra división entre variables y constantes lógicas.

Pues bien, los primeros términos—sin enlace—se dividen, a su vez, en diez categorías que nos permiten particionar la estructura de la realidad a través de la predicación: una sustancia—la categoría de lo independiente—y nueve accidentes—la categoría de lo dependiente—, como sigue:

- ουςία (sustancia), que es el individo, como "humán" o "caballo."
- ποσόν (cantidad), como "dos" en "las dos manos de un humán."
- ποιόν (cualidad), como "ser blanco" en "un caballo es blanco."
- πρός τι (relación), como "ser más rápido que" en "un caballo es más rápido que un humán."
- που (lugar), como "estar en la universidad" en "un humán está en la universidad."
- πότε (tiempo), como "hoy" en "un caballo murió hoy."
- κείστηαι (situación), como "estar de pie" en "un humán está de pie."
- εξειν (posesión), como "estar armado" en "un humán está armado."
- ποιείν (acción), como "estar corriendo" en "un caballo está corriendo."
- πάσξειν (pasión), como "estar dolido" en "un caballo está dolido."

Otras listas similares, pero que omitimos aquí por razones de redundancia, son la de *Tópicos* (donde ουςία es reemplazado por τί έστι) y la de *Física* (donde hay solo ocho categorías).

Con esta sistematización de categorías, Aristóteles pretendió particionar la estructura de la realidad según el "decirse de" (plano lingüístico) o el "estar en" (plano ontológico) un sujeto. Por lo que todo lo que es, lo que hay, o bien es sustancia (i.e. es la primera categoría, κατ΄ αυτό) o bien es accidente (i.e. pertenece al resto de categorías, κατ΄ σψμβεβεκός).

Esta teoría ontológica, que ahora nos resulta tradicional y acabada, fue explorada y desarrollada mediante algunos aportes de la lógica medieval, por lo que produjo no solo varias ontologías, sino

también diferentes representaciones gráficas: el *Arbor Porphyrianae* para las categorías aristotélicas es un ejemplo paradigmático de teoría categorial medieval (Figura 5.1).

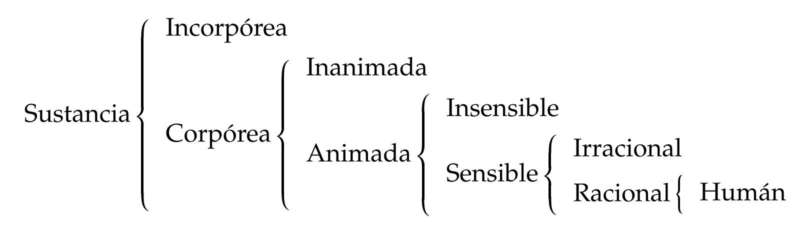


Figura 5.1: *Arbor Porphyrianae*

Por lógica medieval se suele entender a la lógica desarrollada en el occidente Cristiano durante la Edad Media, aproximadamente del s. XI al XV. Esta lógica es heredera de la lógica griega, especialmente de la aristotélica, por lo que no sorprende la continuidad entre la teoría de categorías de Aristóteles y los aportes propios de esta lógica.

El primer tratado medieval de lógica es la *Dialéctica* de Alcuino de York, a quien Carlomagno llamó en 786 para dirigir la Escuela Palatina y organizar, por mandato imperial, los estudios en las escuelas monásticas y episcopales, cuna de la filosofía escolástica y origen de las universidades medievales, donde se difundió el *trivium* y el *quadrivium*.

Bajo este modelo la lógica quedó relegada a nociones elementales de las artes liberales; sin embargo, la aparición de las primeras discusiones sobre la naturaleza de los (mal llamados) universales renovaron el interés por la lógica y su relación con la gramática. El primer lógico medieval importante en este sentido fue Pedro Abelardo, de quien tenemos las primeras discusiones sobre la naturaleza de los universales. Este fue un momento importante, pues a partir de la segunda mitad del siglo XII llegaron a occidente el resto de las obras lógicas de Aristóteles.

A la lógica basada en estas nuevas obras se le llamó *ars nova* y era la usada en las universidades del siglo XIII. El autor más representativo de esta lógica moderna es Pedro Hispano (ca. s. XIII), cuyas obras de lógica, *Summulae Logicales*, fueron los manuales usuales durante los siglos XIV y XV con más de 150 ediciones.

A finales del siglo XIII la lógica moderna se instaló en Oxford, donde consiguió algunos de sus momentos más importantes con Duns Escoto y Guillermo de Occam, mientras que, por otro lado, Alberto Magno y Alberto de Sajonia trataron el problema de los términos sincategoremáticos.

Dicho lo anterior, lo que parece más relevante para nuestros fines, en este momento, es la teoría de la referencia o la teoría de la suposición de los términos (*suppositio terminorum*), la cual, como la teoría de la consecuencia y la lógica modal, fue ampliamente desarrollada por pensadores como Guillermo de Sherwood, Tomás de Aquino, Walter Burleigh y el propio Guillermo de Occam.

Así, por ejemplo, la teoría de la suposición de Pedro Hispano, que se encuentra en el Tratado VI de sus *Summulae*, es una teoría de los términos categóricos. Para la presentación de esta teoría, como la de los otros pensadores medievales, seguimos la presentación de Philotheus Boehner [Boe07] y Campos Benítez [CB03] (Figura 5.2).

La suposición discreta ocurre cuando un término es singular, como en "este humán;" la común se expresa por el término sin demostrativo, como en "humán." La común se divide en natural y accidental. La suposición natural se da cuando un término común se refiere a todas las cosas con respecto a las cuales, por naturaleza, es apto de ser participado. Por ejemplo, "humán" supone a todos aquellos ítems a los que se les puede aplicar dicho predicado, como cuando decimos "ser humán es ser mortal." La suposición accidental, por otro lado, se divide en simple y personal. La simple es la acepción del término común en lugar de una cosa universal significada por el mismo, como por ejemplo, cuando se dice que "ser humán es ser una especie." El resto de las divisiones involucran aspectos de la cuantificación, más que de la predicación (cfr. [CB03]).

La teoría de la suposición de Guillermo de Sherwood (Figura 5.3) comienza haciendo una división entre la suposición material y la formal. La primera se usa para hacer referencia a las entidades lingüísticas, como cuando decimos, por ejemplo, que "francesa no es una palabra francesa" y, en ese sentido, se asemeja a nuestra distinción entre

uso y mención: la suposición material es como la mención. Por otro lado, la suposición formal depende de ciertas disposiciones aristotélicas. La suposición simple se da cuando un término supone lo que significa por aquello que significa, como con Pedro Hispano; pero es personal cuando supone lo que significa por algo subordinado a lo que significa, como en "un humán corre."

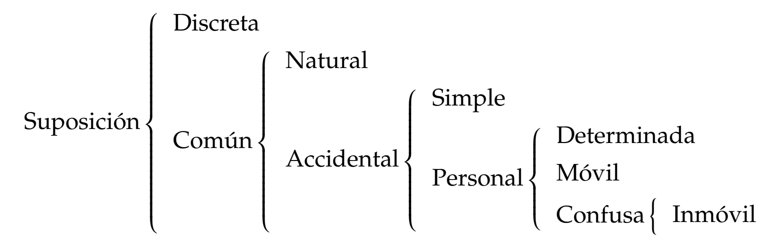


Figura 5.2: Teoría de la suposición de Pedro Hispano. Adaptada de [CB03]

La teoría de Occam, a diferencia de la Guillermo de Sherwood, que es realista, es más bien nominalista (Figura 5.4). Así, entre otras diferencias, podemos ver la introducción de la suposición impropia, la cual se refiere a usos metafóricos de los términos. Y por último, la teoría de Alberto de Sajonia (Figura 5.5) presenta la misma organización que la de Occam, con algunas pequeñas variantes, como que en la suposición material la cuantificación no solo aplica a individuos, sino a términos, como en "toda 'francesa' no es francesa."

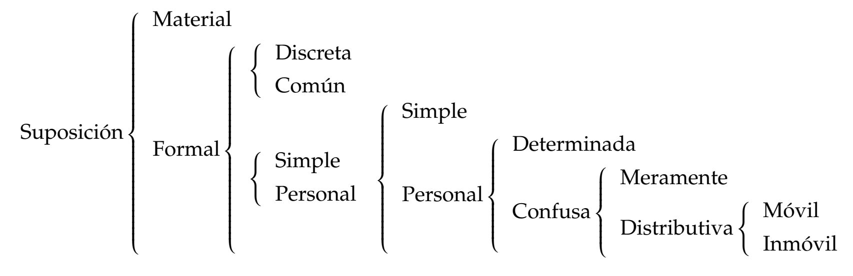


Figura 5.3: Teoría de la suposición de Guillermo de Sherwood. Adaptada de [CB03]

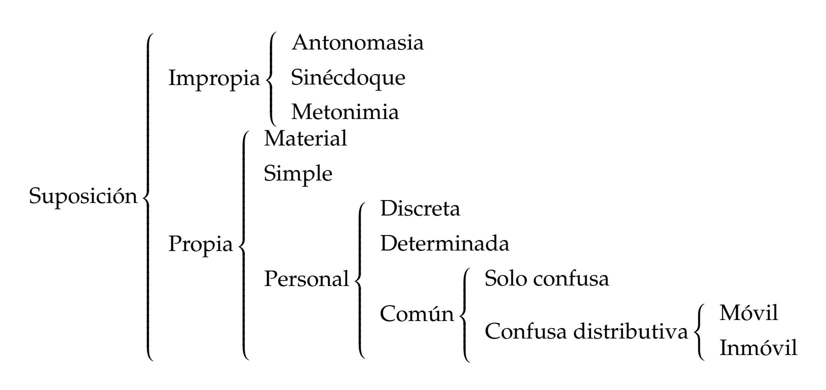


Figura 5.4: Teoría de la suposición de Guillermo de Occam. Adaptada de [CB03]

Lo que este breve repaso muestra es que, como concluye [CB03], la teoría de la suposición ofrece un conjunto de modelos sobre la referencia de los términos con base en la estructura de la predicación y que, en general, mientras los autores del siglo XIII ofrecieron modelos realistas, los del siglo XIV propusieron modelos más bien nominalistas.

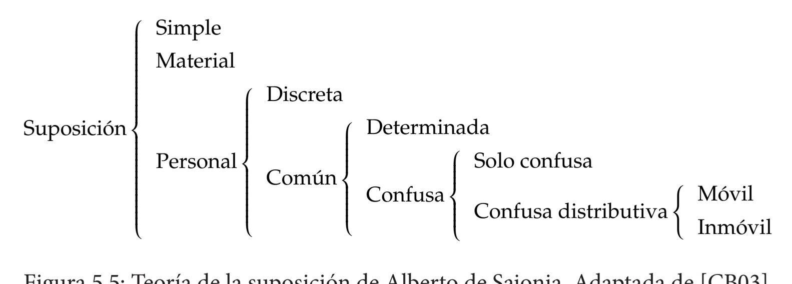


Figura 5.5: Teoría de la suposición de Alberto de Sajonia. Adaptada de [CB03]

La modernidad, por su parte, también desarrolló sistemas de categorías, siendo el de Kant, posiblemente, el más conocido. Así, en la Analítica Trascendental de su primera *Crítica* (A70/B95), Kant desarrolló sistemáticamente su doctrina sobre las categorías, las cuales quedan definidas como conceptos puros del entendimiento que relacionan los objetos de la intuición sensible *a priori*. De esta manera, las categorías se convierten en formas *a priori* necesarias para entender la experiencia sensible y, en consecuencia, dejan de ser géneros supremos o últimos de la realidad para convertirse en funciones cognitivas básicas del entendimiento.

Por supuesto, Kant reconoció que la noción de categoría provenía de Aristóteles, pero en su opinión, la taxonomía de Aristóteles era azarosa y problemática por incluir categorías derivadas de otras. Por ello, Kant formuló su teoría categorial con base en la estructura y tipos de enunciados como sigue:

- Cantidad.
  - *Einheit* (unidad), por los enunciados singulares, como "Kant es una persona."
  - *Vielheit* (pluralidad), por los enunciados particulares, como "Algunas personas tienen derechos."
  - *Allheit* (totalidad), por los enunciados universales, como "Toda persona tiene derechos."
- Cualidad.
  - *Realität* (realidad), por los enunciados afirmativos, como "Kant es filósofo."
  - *Negation* (negación), por los enunciados negativos, como "Kant no es filósofo."
  - *Limitation* (limitación), por los enunciados infinitos, como "Kant no es divisible por 2."
- Relación.
  - *Inhärenz und Subsistenz* (accidente y sustancia), por los enunciados categóricos, como "Todas las *Críticas* son productos culturales."
  - *Causalität und Dependenz* (causa y efecto), por los enunciados hipotéticos, como "Si Kant es único entonces como Kant no hay dos."
  - *Gemeinschaft* (acción recíproca), por los enunciados disyuntivos, como "O bien Kant es prusiano o bien no lo es."
- Modalidad.
  - *Möglichkeit und Unmöglichkeit* (posibilidad e imposibilidad), por los enunciados problemáticos, como "Es posible que Kant sea alemán."
  - *Dasein und Nichtsein* (existencia e inexistencia), por los enunciados asertóricos, como "Kant es alemán."

- *Nothwendigkeit und Zufalligkeit* (necesidad y contingencia), por los enunciados apodícticos, como "Necesariamente Kant es alemán."

Hay dos diferencias importantes entre las categorías aristotélicas y las kantianas: primero, las aristotélicas pretenden mapear la realidad y las cosas mismas, mientras que las segundas pretenden mapear los fenómenos o las cosas tal como nos aparecen; y segundo, en el modelo aristotélico nuestra comprensión de las categorías parece depender de la naturaleza misma de las cosas, mientras que en las kantianas es la naturaleza la que parece depender de las categorías, pues es a través de ellas que un sujeto trascendental puede pensar los objetos de la naturaleza y concebir a esta última como una unidad legislada.

La filosofía contemporánea, tanto en la tradición continental como en la analítica, también ha producido diferentes sistemas de categorías y todo un *desideratum* [Har40, Ing64, Som82, Chi89, Hof94, Low06, Joh13, Eng13, Eng17].

En la tradición continental tenemos, por ejemplo, además de la influencia de Husserl, el caso de Hartmann, quien sostuvo que la realidad se entiende a través de grandes categorías o esferas del ser relacionadas por ciertas leyes. Para Hartmann, toda filosofía ha de ser filosofía categorial y, en consecuencia, toda filosofía ha de tener una teoría de categorías. En *Möglichkeit und Wircklichkeit* se encargó de estudiar lo que llamó categorías modales, es decir, aquellas categorías que aplican a toda la realidad; en *Der Aufbau der realen Welt* investigó lo que llamó categorías fundamentales o del mundo real (como materia-forma, continuo-discreto, etc.); y en *Philosophie der Natur* analizó categorías relacionadas con ciertos niveles o parcelas de la realidad, categorías llamadas especiales (como espiritualidad, mente, vida, etc.), así como ciertas leyes categoriales (como coherencia, predeterminación, dependencia, etc.).

Por otro lado, en la tradición analítica encontramos el caso de Russell quien, por ejemplo, desarrolló la teoría de tipos para resolver, entre otras cosas, paradojas como las generadas por el Axioma de

Comprensión de la (mal llamada) teoría de conjuntos ingenua. Según la teoría (simple) de Russell, que se encuentra en el apéndice B de sus *Principles of Mathematics*, los tipos lógicos son funciones que nos permiten clasificar individuos, conjuntos, conjuntos de conjuntos, etc., según una jerarquía que hay que respetar so pena de caer en contradicciones. Por ejemplo, de acuerdo con estos niveles, las constantes individuales tienen tipo 1; los atributos de una constante tienen tipo 2; los atributos de un atributo tienen tipo 3; y así sucesivamente, de modo que los atributos del atributo tipo n tienen tipo $n + 1$.

Estos últimos modelos nos permiten observar la particular importancia que tiene la partición de la estructura de la realidad de acuerdo con la predicación. En efecto, los modelos teóricos seleccionados ofrecen evidencia de que el análisis categorial no es menor en filosofía y, por otro lado, nos advierten, aunque sea tácitamente, del problema de transgredir categorías, es decir, de cometer errores categoriales o saltos categoriales injustificados.

Un error categorial ocurre cuando a un ítem que pertenece a una categoría i se le asigna un atributo de categoría j cuando $j \neq i$. Como decíamos previamente, Ryle acuñó tal expresión y sugirió un *Gedankenexperiment* para explicarlo:

> A foreigner visiting Oxford or Cambridge for the first time is shown a number of colleges, libraries, playing fields, museums, scientific departments and administrative offices. He then asks 'But where is the University? I have seen where the members of the Colleges live, where the Registrar works, where the scientists experiment and the rest. But I have not yet seen the University in which reside and work the members of your University.' It has then to be explained to him that the University is not another collateral institution, some ulterior counterpart to the colleges, laboratories and offices which he has seen. The University is just the way in which all that he has already seen is organized. When they are seen and when their co-ordination is understood, the University has been seen. His mistake lay in his innocent assumption that it was correct to speak of Christ Church, the Bodleian Library, the Ashmolean Museum *and* the University, to speak, that is, as if 'the University' stood for an extra member of the class of which these other units are members.

> He was mistakenly allocating the University to the same category as that to which the other institutions belong. [Ryl51, p.12]

En este ejemplo el error categorial ocurre cuando la persona visitante inserta a la universidad en la categoría de edificios, ya que el primero pertenece a la categoría de instituciones.

La influencia de Husserl y Russell se puede apreciar con claridad aquí pues, para Ryle—como para Aristóteles—hay ciertos enunciados que no parecen hacer sentido en virtud de la predicación. Enunciados como "La maldad está en el cerebro" o "Las redes sociales criticaron al presidente" son ejemplos de errores categoriales y, para Ryle, prestar atención a este tipo de construcciones es de suma importancia porque podríamos perder de vista los alcances y los límites de las propuestas filosóficas si no tenemos sistemas de categorías adecuados [Ryl38, p.189].

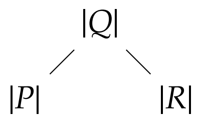
Con la impronta de Ryle, y en un esfuerzo por entender la estructura lógica del lenguaje, Fred Sommers [Som82] consideró que los términos predicables de cualquier lenguaje tienen una carga lógica positiva o negativa, por ejemplo, *rojo*/*no rojo*, *masivo*/*sin masa*, *atado*/*desatado*, *en México*/*no en México*.

De acuerdo con esta suposición, todo enunciado tiene asociado algún plano categorial: la predicación de un término puede resultar en una proposición verdadera, una proposición falsa o una proposición sin sentido: lo que Sommers llamó error categorial, siguiendo a Ryle. Un término que se puede predicar con sentido categorial de algún individuo se dice que *abarca* (*spans*) a ese individuo. Así, por ejemplo, *rojo* abarca a Aristóteles, un coche o una pared, pero no abarca π, las leyes de Kepler o los sueños de Chomsky. Nótese, sin embargo, que si un término abarca a un individuo, también lo abarca un término con carga opuesta, es decir, *no rojo* abarca todo lo que *rojo* abarca, y falla en abarcar lo que *rojo* no logra abarcar: no se puede decir, con sentido categorial, que el número π sea rojo o no rojo. Usando la notación $|rojo|$ para indicar el valor absoluto de un término, como en matemáticas, $|rojo|$ sería *rojo* (carga positiva) o *no rojo* (carga negativa). El conjunto de individuos abarcados por un término dado sería una categoría.

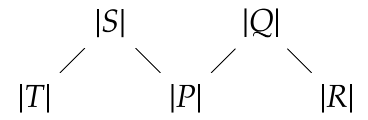
Los pares de términos (absolutos) que se pueden unir para formar un enunciado con sentido categorial se U-relacionan ("U" por "uso"); los pares de términos que no se pueden unir están N-relacionados ("N" por *nonsense*, sinsentido categorial). Cada posible par de términos en un lenguaje, entonces, estará U- relacionado o N-relacionado, y dichas relaciones son simétricas y reflexivas, pero no transitivas. Y un modelo de estas relaciones de sentido entre los términos de un lenguaje finito nos ofrece un modelo de la estructura categorial de un lenguaje. La genialidad de la teoría de Sommers es su capacidad para demostrar que esta estructura tiene la forma de un árbol binario con un solo vértice, una forma que nos recuerda al *Arbor Porphyrianae*.

En una estructura arborescente de este tipo, dos términos cualesquiera U-relacionados con un tercer término están conectados; y dos términos cualesquiera conectados a un tercer término están conectados. Un lenguaje, entonces, será el conjunto más grande de términos conectados entre sí. Dos términos cualesquiera que estén conectados en un árbol de manera que un camino continuo hacia arriba o hacia abajo de segmentos de línea conduzca de uno a otro están U-relacionados. Podría pensarse, a partir de esto, que un requisito estructural sería la regla de transitividad: dos términos cualesquiera U-relacionados con un tercero deben estar U-relacionados entre sí. Pero esta regla no se cumple. Un contraejemplo en español sería *persona* y *divisible entre 2*, ambos U-relacionados con *interesante* pero no U-relacionados entre sí.

El principio estructural que gobierna la estructura de sentido de un lenguaje es lo que Sommers llama "ley de inclusión de categorías." Cuando se lee como una regla que gobierna las relaciones de sentido entre términos dice que, dados dos términos N-relacionados que están U-relacionados con un tercer término, no puede haber otro término que esté U-relacionado con uno de los dos primeros excepto N-relacionado con el tercero. Supongamos que los dos primeros términos son el par N-relacionado, P y R, y el tercer término, con el que ambos están U-relacionados es Q. Esto se puede diagramar en un segmento de árbol de la siguiente manera:



Ahora, sea |*S*| el cuarto término. Dado que este último está U-relacionado con uno de los dos primeros términos, digamos |*P*|, pero está N-relacionado a |*Q*|, entonces tiene que existir un quinto término tal que está U-relacionado con |*S*| pero no con |*Q*|:



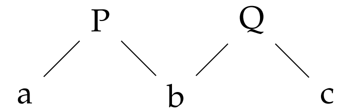
Esta configuración se conoce como "la configuración M," y la ley de inclusión la prohíbe. En consecuencia, ningún camino de relaciones de sentido puede cambiar su progresión hacia arriba o hacia abajo: una vez que un camino de U-relaciones comienza a descender, continúa hacia abajo. Así, la ley de inclusión de categorías sostiene que si dos categorías están incluidas en una tercera categoría, pero no entre sí, entonces no puede haber una cuarta categoría que incluya una de las dos primeras pero no incluya a la otra. En otras palabras, si dos categorías comparten algún miembro en común, entonces al menos uno de ellos debe estar incluido en el otro.

Las categorías pueden ser mutuamente excluyentes o una puede incluir a la otra; pero no pueden superponerse. La característica más destacada de los términos en los nodos inferiores de un árbol es que están U-relacionados con cada término que está por encima de ellos en la ruta en la que terminan. Esto significa que la categoría determinada por un término inferior está incluida en cada una de las categorías determinadas por los términos con los que ese término está U-relacionado. Tales categorías de nodo inferior son tipos. Si bien un automóvil y Aristóteles pertenecen a la categoría con respecto a *rojo*, no pertenecen al mismo tipo.

Si dos ítems pertenecen al mismo tipo, cualquier término que abarque a uno abarcará al otro. En otras palabras, todos los miem-

bros de un tipo dado están abarcados por todos los mismos términos. Así como las categorías constituyen un subconjunto de conjuntos (su diferencia es que nunca simplemente se superponen), los tipos constituyen un subconjunto de categorías: los tipos nunca se incluyen entre sí.

No hay dos términos que sean tales que cada uno abarque a un ítem no abarcado por el otro y puedan abarcar ambos a algún otro ítem. Permitiendo que las letras mayúsculas representen nuevamente términos (absolutos), las letras minúsculas ítems y los segmentos de línea que abarcan relaciones, la regla prohíbe lo siguiente:



De acuerdo con estas consideraciones, diríamos que ninguna teoría es categorialmente coherente si permite configuraciones M.

Los errores categoriales, básicamente, emergen de estructuras M: un salto categorial injustificado es una estructura M. Consideremos, a modo de ejemplo, los términos "masa" y "maldad" (en referencia al Ejemplo 2). El primero abarca tanto a cerebros como a personas, pero no a conductas; el segundo abarca tanto a conductas como a personas, pero no a cerebros. El resultado de este ejemplo es una estructura M, y para recuperar la coherencia categorial se tiene que (de)negar algún enunciado o imponer algún uso analógico de un término.

En fin, que podemos inferir varias conclusiones a partir de esta breve revisión de antecedentes, pero lo que debería estar claro hasta este punto es que los sistemas categoriales no son accesorios a la filosofía y que considerar que son filosóficamente importantes no es una exageración. En la analítica filosófica, como en la argumentación, no basta con considerar a la verdad, la validez, la solidez o la relevancia: la aproximación categorial también es fundamental.

Alquimia epistémica. El esfuerzo por transmutar la ignorancia en conocimiento con la ayuda de símbolos. Gracias a ellos se crea una ilusión de conocimiento y, quizás, de exactitud.

— Mario Bunge
Diccionario de Filosofía

6. Conclusiones

Imaginemos que una categoría es como un punto. Cuando relacionamos dos puntos obtenemos una línea, una línea de sentido, y cuando cruzamos varias líneas de este tipo obtenemos un plano categorial, un plano de sentido. Así, los enunciados declarativos y los razonamientos son instancias discursivas que combinan categorías, pero tales combinaciones pueden ser legítimas o ilegítimas: cuando son ilegítimas son saltos categoriales injustificados o errores categoriales. Ahora bien, como la lógica clásica (la pragmática y la lógica relevante) no regula este tipo de combinaciones, parece necesario tomar en cuenta un sistema inferencial que nos permita regularlos. Esto tiene sentido por dos razones adicionales.

Primero, la filosofía, como otras disciplinas argumentativas, es una labor racional, y por tanto, hace uso de razonamientos; pero en la práctica discursiva no basta con que los razonamientos sean válidos, sólidos o relevantes pues, como hemos visto, también se usan y se necesitan razonamientos con sentido categorial. En este trabajo, justamente, hemos intentado implementar una lógica de planos categoriales para regular otro aspecto filosófico de la inferencia que, como hemos visto, aunque ha sido históricamente reconocido, no ha sido estudiado lógicamente con el mismo interés.

Segundo, a menudo se considera que la lógica clásica es tópicamente neutral y completamente general. Podemos aceptar, con ciertas reservas, esta tesis; pero lo que no parece ser aceptable es que se confunda a la lógica clásica con el razonamiento en general, y mucho menos, con el razonamiento filosófico en particular, pues este no es tópicamente neutro ni completamente general. El problema ha sido intercambiar, pretendiendo una sustitución *salva veritate*, “lógica” por “razonamiento filosófico,” lo cual parece ilegítimo porque el segundo conlleva el uso de más de un plano categorial. El razona-

miento filosófico hace un uso natural de planos categoriales. En consecuencia, este tipo de razonamiento es *sui generis*, y por lo pronto, repetimos la sentencia de Kripke: "No hay ningún sustituto matemático para la filosofía."

*

En el otoño del 2003, como parte de nuestros estudios de licenciatura en filosofía, tomamos un curso de Introducción al Análisis Filosófico con Ariel Campirán, quien introdujo los conceptos de plano y salto categorial como herramientas de análisis filosófico. En aquel entonces dichos conceptos nos resultaron reveladores, no solo porque los desconocíamos, sino porque nos ofrecían la posibilidad de analizar argumentos y proposiciones filosóficas de una manera especial y distintiva; sin embargo, en ese momento teníamos una comprensión preteórica de los mismos, esto es, los usábamos, pero carecíamos de una visión inferencial de ellos.

Esta situación generó un interés legítimo por su sistematización inferencial que nos llevó a desarrollar una breve investigación que se convertiría, más tarde, en nuestro trabajo recepcional. Así, en marzo del 2006, en el Salón Blanco de la Ex-Unidad de Humanidades de la Universidad Veracruzana, defendimos nuestra tesis de licenciatura bajo la dirección del mismo Ariel Campirán. Este trabajo es un *remake* de aquella tesis.

* * *

Parte del material expuesto en los Capítulos 3 y 4 apareció en *Ergo* 21, y en *Aufklärung. Revista de Filosofia* 4(1), por lo que agradecemos a ambas revistas por los permisos de reproducción. Agradecemos también a Alexis Dimitriadis y Samuel R. Buss por la disponibilidad de los paquetes qtree y bussproofs, respectivamente.

* * * * *

Para cerrar, me gustaría desligarme un momento de lo que parece *pluralis modestiae* para agradecer enfáticamente a mi mujer, Verónica, que es mi causa final. A mi familia (Zandra, Numa, Omar, Irma,

Yolanda), que ha sido mi causa eficiente. A la larga lista de personas que han dictaminado y han dado causa formal a este estudio. Y, por supuesto, a mis colegas (Roberto Casales García, Jorge Medina Delgadillo, Paniel-O. Reyes Cárdenas, Rubén Sánchez Muñoz, Cintia Robles Luján, Livia Bastos Andrade, Juan José Blázquez Ortega) y estudiantes de la Facultad de Filosofía de la UPAEP que ya se han convertido en una causa material.

A. Lista de abreviaturas

L_0	Lógica proposicional clásica
L_C	Lógica de planos categoriales
L_{Cx0}	Lógica producto de L_C y L_0
L^+	Lógica extendida
VAR	Conjunto de variables
CONS	Conjunto de constantes
fbf	Fórmula bien formada
min	Función mínimo
max	Función máximo
I	Regla de introducción
E	Regla de eliminación
h	Introducción de hipótesis
rep	Repetición
it	Iteración
SH	Silogismo hipotético
SD	Silogismo disyuntivo
DM	Teorema de De Morgan
DN	Doble negación

B. Lista de símbolos

$p, q, r, \ldots$	Variables
$\varphi, \psi, \gamma, \ldots$	Metavariables
$\Phi, \Gamma, \Omega, \ldots$	Conjuntos de variables
$\Leftrightarrow$	Equivalencia
$\Rightarrow$	Implicación
$\wedge$	Conjunción
$\vee$	Disyunción
$\neg$	Negación
$\ulcorner$	Denegación
$=$	Igualdad
$\in$	Pertenencia
$/$	Complemento relativo
$\longmapsto$	Mapeo
$\vdash$	Deducción
$\bot$	Valor antidesignado. Error categorial, salto categorial
$\top$	Conjunto de valores designados
$\sigma, \pi, \delta, o, \varepsilon, \nu$	Planos categoriales
$\nu_{\mathsf{L_C}}$	Valuación en $\mathsf{L_C}$
$\nu_{\mathsf{L_0}}$	Valuación en $\mathsf{L_0}$
$\nu_{\mathsf{L_{C\times 0}}}$	Valuación en $\mathsf{L_{C\times 0}}$
ν, ν'	Valuaciones
$\times$	Producto
$\leq$	Menor o igual que
$\geq$	Mayor o igual que
$\models$	Tautología
$(,), \{,\}, \langle,\rangle$	Signos de agrupación

Bibliografía

[Boe07] P. Boehner. *Medieval Logic: An Outline of Its Development from 1250 to c. 1400*. Wipf & Stock Publishers, 2007.

[CB03] J.M. Campos-Benítez. La lógica modal medieval. *Ergo. Nueva Época*, (12):35–58, 2003.

[Chi89] R. Chisholm. *On Metaphysics*. University of Minnesota Press, 1989.

[Eng13] G. Englebretsen. *Robust Reality: An Essay in Formal Ontology*. Philosophische Analyse/Philosophical Analysis. De Gruyter, 2013.

[Eng17] G. Englebretsen. *Bare Facts and Naked Truths: A New Correspondence Theory of Truth*. Taylor & Francis, 2017.

[Eps13] Carnielli W. d'Ottaviano I.M. Krajewski S. y Maddux R.D. Epstein, R.L. *The Semantic Foundations of Logic Volume 1: Propositional Logics*. Nijhoff International Philosophy Series. Springer Netherlands, 2013.

[Haa78] S. Haack. *Philosophy of Logics*. Cambridge University Press, 1978.

[Har40] N. Hartmann. *Der Aufbau der realen Welt: Grundriß der allgemeinen Kategorienlehre*. De Gruyter, 1940.

[Hof94] G.S. Hoffman, J. y Rosenkrantz. *Substance Among Other Categories*. Cambridge Studies in Philosophy. Cambridge University Press, 1994.

[Ing64] R. Ingarden. *Time and Modes of Being*. Thomas, 1964.

[Joh13] I. Johansson. *Ontological Investigations: An Inquiry into the Categories of Nature, Man and Soceity*. Reprint Philosophy. De Gruyter, 2013.

[Low06] E.J. Lowe. *The Four-Category Ontology: A Metaphysical Foundation for Natural Science*. Clarendon Press, 2006.

[Mar04] E. Mares. *Relevant Logic: A Philosophical Interpretation*. Cambridge University Press, 2004.

[Ryl38] G. Ryle. Categories. *Proceedings of the Aristotelian Society*, (30):189–206, 1938.

[Ryl51] G. Ryle. *The Concept of Mind*. Hutchinston House, London, 1951.

[Som82] F.T. Sommers. *The Logic of Natural Language*. Clarendon Library of Logic and Philosophy. Clarendon Press; Oxford: New York: Oxford University Press, 1982.

Índice analítico

Índice onomástico

La filosofía, como otras disciplinas argumentativas, es una labor racional, y por tanto, hace uso de razonamientos; sin embargo, en la práctica filosófica no basta con que dichos razonamientos sean válidos, sólidos o relevantes, pues también se usan y se necesitan razonamientos con sentido categorial. Con esto en mente, en este trabajo se implementa una lógica de planos categoriales para regular otro aspecto filosófico de la inferencia que, si bien ha sido históricamente reconocido, no ha recibido la misma atención desde un punto de vista lógico. Así, pensando en los conceptos de error, salto y plano categorial, en este trabajo se ofrece una lógica no-clásica de planos categoriales que se multiplica por la lógica clásica para generar una lógica producto que combina criterios de validez con criterios de corrección categorial.





